Einführung in die Mechanik

1 Kinematik

Was Ein Airbus A380, eine Vorrichtung zur Geschwindigkeitsmessung von Fahrzeugen und Galileo Galilei gemeinsam haben, das erfahren sie in diesem Kapitel.
Bildquellen: Multanova.ch und Wikipedia

Kantonsschule Solothurn
Reto Basler Stotzer

Inhaltsverzeichnis

1 Kinematik 1
1.1 Einleitung 3
1.2 Modelle: von Vorstellungen, Illusionen und Wirklichkeit 3
1.3 Von Einheiten 5
1.4 Das internationale Einheitensystem: die SI - Einheiten 5
1.4.1 das Meter 6
1.4.2 die Sekunde 6
1.4.3 und das Kilogramm 6
1.4.4 Zusammengesetzte Einheiten 6
1.5 ''Alte'' Einheiten 7
1.6 Die Vorsilben 7
1.7 Die Zehnerpotenzen 8
1.8 Koordinatensysteme 8
1.8.1 Ein Schachbrett als Koordinatensystem 8
1.9 Die Kinematik des Massenpunktes 9
1.9.1 Bewegungen in einer Dimension 9
1.9.2 Die allgemeine Änderung von Grössen 10
1.9.3 Graphische Darstellung einer Bewegung 10
1.9.4 Die gleichförmige Bewegung 11
1.9.5 Die gleichmässige Bewegung 18
1.9.6 Würfe 21

1.1 Einleitung

Unser gesamtes Umfeld ist voll von interessanten Dingen und Zusammenhängen. Die Naturwissenschaften versuchen, Effekte zu verstehen und zu erklären. Ziel ist es, unsere Neugierde gegenüber der Natur zu befriedigen und eventuell neue technische Verfahren zu entwickeln. Die verschiedenen Naturwissenschaften arbeiten dabei Hand in Hand miteinander.
Ein Beispiel wäre das Vergammeln von Fleisch. Der Biologe kümmert sich darum, welche "Tierchen" daran beteiligt sind und unter welchen Bedingungen sich diese vermehren, der Chemiker identifiziert die entstehenden Stoffe. Der Biologe stellt fest, dass Bakterien für den Verwesungsprozess verantwortlich sind und dass sich diese bei kühlen Temperaturen nicht stark vermehren - und schon entwickelt der Physiker den Kühlschrank, damit das Fleisch schön schliesslich schön kühl bleibt und der Verwesungsprozess langsamer vonstattengeht.

Die Naturwissenschaften beschäftigen sich mit solchen Fragestellungen und versuchen Antworten zu finden. Die Physik – vom griechischen "physike episteme" (die Natur betreffend) – ist die Lehre von den Naturvorgängen. Die Physiker versuchen durch

- experimentelle Forschung
- und mathematische Darstellung

von Naturvorgängen Gesetze zu formulieren, welche unsere Welt beschreiben und somit ein wenig zugänglicher machen. Physikalische Gesetze werden in der Entwicklung angewendet und ermöglichen so z.B. den Bau neuer und besserer Solarzellen.

Obige zwei Punkte sind denn auch die zentralen Standbeine des Unterrichtes. Sie sollen lernen zu experimentieren (nein, das kann man nicht einfach), die Resultate auszuwerten und anschliessend Schlussfolgerungen zu ziehen. Dabei soll Ihnen dieses Skript helfen. Weiter werden Sie lernen, die erarbeiteten Gesetze auf Probleme anzuwenden, welche für Sie neu erscheinen.

1.2 Modelle: von Vorstellungen, Illusionen und Wirklichkeit

Der Mensch ist in der Lage, sich mit seiner Umwelt und sich selbst auseinanderzusetzen. Er ist ebenfalls in der Lage Phänomene in ein zeitliches Raster zu setzen. Diese Fähigkeiten stellen ihn vor das Problem, wie er zu Erkenntnissen kommt und inwieweit diese wahr sind.

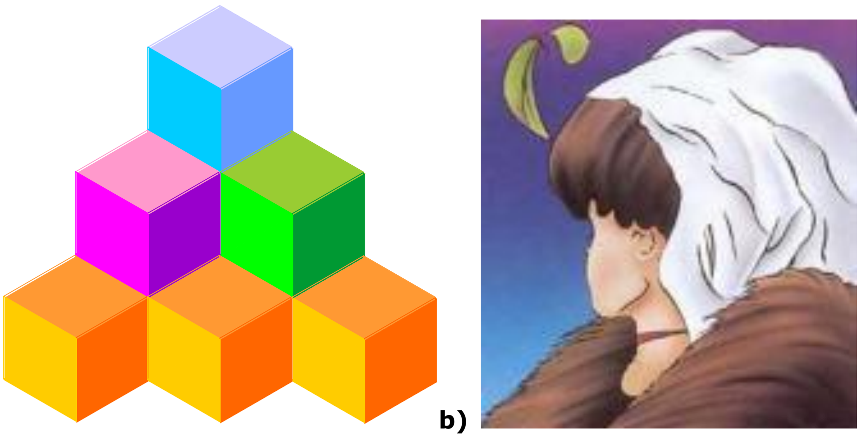
Der Naturwissenschaftler sammelt Daten, welche in irgendeiner Weise messbar und reproduzierbar sein müssen. Diese können durch Beobachtung oder Beschreibung eines Phänomens oder eines Experiments zustande kommen. Diese Daten dienen nun dazu, um gewisse Phänomene zu beschreiben. Dabei entsteht die Hypothese. Diese verbindet Beobachtung und Erfahrung.

Die Hypothese versucht man nun durch gezielte Experimente zu verifizieren, zu verfeinern und zu vervollständigen. Dies führt zu einer verbesserten Hypothese, einem Modell. Die verfeinerten Hypothesen widersprechen nun immer weniger Fakten und können zur Formulierung einer neuen Theorie genutzt werden. Diese regt nun ihrerseits wieder zu neuen Experimenten und vorhersagen an, so dass auch die Theorie laufend verbessert werden kann.

Bei allem Enthusiasmus, welcher sich um ein Modell entwickeln kann, darf jedoch nicht vergessen werden, dass ein Modell nur einen kleinen beobachteten Ausschnitt aus einem komplexen Gefüge von Erscheinungen, der Wirklichkeit, annähernd erklären kann. Man darf auch nie ausser Acht lassen, dass sich das Modell an der Wirklichkeit zu orientieren hat und nicht umgekehrt.

"Insofern sich eine Theorie auf die Wirklichkeit bezieht, ist sie nicht sicher. Insofern sie sicher ist, bezieht sie sich nicht auf die Wirklichkeit." Albert Einstein

Modelle helfen uns, unsere Umwelt besser verstehen zu lernen. Man braucht sie in der Chemie zur Darstellung des inneren Aufbaus der Stoffe, welcher weder mit blossem Auge, noch mit technischen Hilfsmitteln direkt beobachtet werden kann. Allerdings sind die Grenzen eines Modells nie zu vergessen. Als Illustration dieser Aussage betrachte man untenstehendes Bild und beantworte folgende Frage: wie viele Würfel sind in Abbildung 1 aufeinander gestapelt?



a) b)

Abbildung 1 Beobachten will gelernt sein!

Eine greise oder eine junge Frau? Das Resultat hängt vom Beobachter ab. Eventuell würde jemand sagen, dass das Resultat nicht eindeutig sei – womit er recht hätte.

Diese Erkenntnis ist ganz wichtig für das Verständnis der Naturwissenschaften allgemein und hier im speziellen für die Physik. Aber auch im alltäglichen Leben sollten Sie nie vergessen: ***Informationen sind immer zu hinterfragen und gegebenenfalls auch anzuzweifeln!***

1.3 Von Einheiten

Die Gesetze der Physik beschreiben Zusammenhänge zwischen physikalischen Grössen wie Länge, Zeit, Kraft, Energie oder Temperatur. Daher besteht eine der wichtigsten Forderungen der Physik darin, solche Grössen eindeutig zu definieren und genau zu messen. Messen einer physikalischen Grösse heisst, sie mit einer genau definierten Einheit dieser Grösse zu vergleichen. Wenn wir etwa sagen, dass eine Distanz zwischen zwei Punkten 2 Meter lang sei, dann meinen wir, dass die Länge 2 mal der Länge einer Einheit entspricht, die Meter genannt wird.

Die grosse Mehrheit der physikalischen Grössen ist mit einer Einheit verknüpft. Ohne Einheit ist die Angabe eines Resultates sinnlos, da man nicht weiss, wovon die Rede ist.

1.4 Das internationale Einheitensystem: die SI[1] - Einheiten

Alle Grössen, welche in der Physik gebräuchlich sind, lassen sich auf **Basisgrössen** zurückführen.

Basisgrössen sind physikalische Grössen, welche nicht durch andere Grössen ausgedrückt werden können.

Die qualitativen Eigenschaften einer Basisgrösse wird durch ihre Einheit ausgedrückt. Das Internationale Einheitensystem baut auf sieben Basisgrössen auf, welche in Tabelle 1 gezeigt sind. Ebenfalls eingetragen sind die Namen der entsprechenden Basiseinheiten und deren Einheitenzeichen.

Tabelle 1 Basisgrössen und deren Einheiten nach SI – Norm.

Basis-grösse	Formel-zeichen	Basis-ein-heit	Symbol
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Stromstärke	I	Ampere	A
Temperatur	T	Kelvin	K
Lichtstärke	I_v	Candela	cd
Stoffmenge	n	Mol	mol

Die für uns im Moment wichtigsten Basiseinheiten, aus dem SI – System sind:

[1] von Système International d’Unités

1.4.1 Der Meter,

Der Meter war ursprünglich definiert als die Distanz zweier Kerben in einem Stab, bestehend aus einer Platin-Iridium Legierung, der in Paris aufbewahrt wird. Dieser Stab wird als Urmeter bezeichnet (Abbildung 2). Heute wird der Meter als jene Strecke *definiert*, welche das Licht in der Zeitspanne von $\frac{1}{299'729'458}$ s zurücklegt.

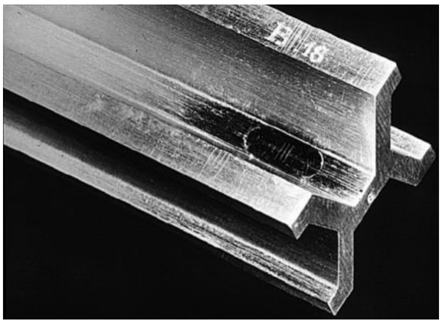


Abbildung 2 Eine Abbildung des Urmeters. Quelle: Wikipedia

1.4.2 die Sekunde

Die Sekunde war bis 1967 *definiert* als der $\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{60}$ Teil des mittleren Sonnentages festgelegt (die Zeitdauer, bis die Sonne wieder am gleichen Ort am Himmel steht), beruhte also auf astronomischen Messungen. Diese Definition wurde aber zu ungenau, weil sich die Rotationsgeschwindigkeit der Erde mit der Zeit verlangsamt. Heute wird von einem Cäsiumatom abgestrahltes Licht zur Definition benutzt, wobei diese aber zu kompliziert ist, um sie hier genauer auszuführen.

1.4.3 und das Kilogramm.

Diese Basiseinheit ist durch die Masse eines Einheitskörpers (Urkilogramm) bestimmt, welcher ebenfalls in Paris aufbewahrt wird (Abbildung 3). In jüngster Zeit versucht die Forschung ein neues "Urkilogramm" herzustellen, dies u.a. in Form einer perfekten Siliziumkugel. Der Grund dafür ist einfach: durch die regelmässigen Reinigungen verliert das bisherige Urkilogramm in Paris langsam an Masse.

Abbildung 3 Das Urkilogramm. Quelle: www.wikipedia.org

1.4.4 Zusammengesetzte Einheiten

Die Einheit jeder physikalischen Grösse kann durch die SI – Einheiten ausgedrückt werden. Gewisse Kombinationen dieser Einheiten haben spezielle Namen. Zum Beispiel ist die Kombination $\frac{kg\cdot m}{s^2}$ besser bekannt als Newton N. Doch davon später mehr.

1.5 "Alte" Einheiten

Im 16. Jahrhundert wurde von oberster Stelle verfügt, dass sechzehn willfährige[2] englische Untertanen am Sonntag nach Verlassen der Kirche die linken Füsse hintereinander in einer Reihe aufstellen sollten. Die auf diese Weise festgelegte Distanz entsprach fortan einer perch (Rute). Der 16. Teil dieser Länge hiess *foot*, wiederum unterteilt in 12 inches. Dabei ist es bis heute geblieben (aus dem Vieweg Einheitenlexikon).

Es gibt tausende Einheiten. Je nach Kontinent oder Kultur sind unterschiedliche Einheitensysteme in Gebrauch. Bis heute ist es nicht gelungen, ein einziges Einheitensystem durchzusetzen. Dies scheitert vor allen Dingen an der Gewohnheit der Leute. Ein Beispiel: Das PS darf eigentlich nicht mehr gebraucht werden. Trotzdem diskutieren die Leute immer noch darüber, wie viele PS ihre Autos besitzen. Unter Kilowatt, der eigentlich gültigen Einheit, kann man sich einfach nichts vorstellen (unter PS zwar auch nicht, aber man meint es zumindest). Wir werden konsequent die SI Einheiten anwenden. Diese haben den Vorteil, dass sie untereinander kompatibel sind und so Umrechnungsfehler ausgeschlossen werden können.

1.6 Die Vorsilben

Weiter sind die sogenannten Vorsilben wichtig. Wir werden nicht sagen, dass jemand eine Masse von 74'000 g besitzt, sondern wir sagen, dieser jemand besitze eine Masse von 74 kg. Ein mittlerer Sonnentag auf der Erde dauert auch nicht 86'400 Sekunden, sondern 24 Stunden. Die gebräuchlichsten Vorsilben sind in Tabelle 2 dargestellt. Wir werden immer diejenige Vorsilbe verwenden, die dem Problem angepasst ist.

Tabelle 2 Vorsilben und deren Abkürzungen

Faktor	Vorsilbe	Zeichen	Faktor	Vorsatz	Zeichen
10^1	Deka	da	10^{-1}	Dezi	d
10^2	Hekto	h	10^{-2}	Zenti	c
10^3	Kilo	k	10^{-3}	Milli	m
10^6	Mega	M	10^{-6}	Mikro	μ
10^9	Giga	G	10^{-9}	Nano	n
10^{12}	Tera	T	10^{-12}	Pico	p

[2] altes Wort für "bereitwillig"

1.7 Die Zehnerpotenzen

Sehr häufig wird anstelle der entsprechenden Vorsilbe auch die Zehnerpotenzschreibweise verwendet. Dies macht immer dann Sinn, wenn innerhalb eines Problems verschiedene Grössen miteinander verrechnet werden müssen. In diesem Fall müssen alle Angaben in SI – Einheiten vorliegen. Man schreibt dann also nicht 35000 Tonnen sondern $3.5 \cdot 10^7$ kg. Natürlich hätte man auch 35000000 kg schreiben dürfen – dies ist allerdings nichts für Schreibfaule. Ausserdem "vergisst" man schnell einmal eine Null. Man kann sich die Zehnerpotenzschreibweise leicht merken:

$$3'520'000 \text{ kg} = 3.52 \cdot 1'000'000 \text{ kg} = 3.52 \cdot 10^6 \text{ kg}$$

$$0.000\,003\,52 \text{ kg} = \frac{3.52}{1'000'000} \text{ kg} = 3.52 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$$

1.8 Koordinatensysteme

Ab jetzt werden wir uns mit Bewegungen von Objekten beschäftigen. Dazu, wird es nötig, den Ort eines Objekts in der Ebene oder im Raum genau angeben zu können. Deshalb legt der Physiker ein Koordinatensystem in seine Umgebung.

1.8.1 Ein Schachbrett als Koordinatensystem

Betrachten wir zunächst das in Abbildung 4 dargestellte Schachbrett: Dieses besteht aus je 32 schwarzen und weissen Quadraten, die abwechslungsweise zu einem grossen Quadrat zusammengesetzt sind. Die Seiten dieses Quadrates sind beschriftet: bei den jeweils den Spielern zugewandten Seiten sind die kleineren Quadrate mit Buchstaben von A – H angeschrieben, auf den beiden anderen Seiten sind sie mit Zahlen von 1 – 8 markiert. Durch diese Beschriftung lässt sich jedes Feld exakt adressieren: steht ein Bauer auf C4, so weiss man, wo der Bauer steht. Man kann aber auch Bewegungen sichtbar machen: jeder Schachspieler weiss, was die Aussage „König von D3 nach C3" bedeutet. Die Beschriftung an der Seite macht dies möglich. Die Schachfiguren bewegen sich in einem ***Koordinatensystem***.

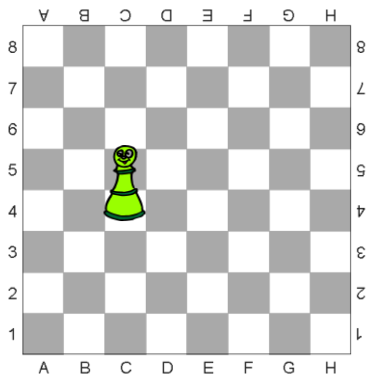


Abbildung 4 Ein Schachbrett zeigt ein zweidimensionales Koordinatensystem.

In den Naturwissenschaften beschriftet man Koordinatensysteme nicht mit Buchstaben, sondern ausschliesslich mit Zahlen. Im dreidimensionalen Raum wählt man dafür drei, je senkrecht zueinander stehende ***Achsen*** (x, y, z), im zweidimensionalen Raum zwei zueinander senkrecht stehende Achsen (x und y) und im eindimensionalen Fall nur eine Achse (x). Dem gemeinsamen Schnittpunkt der Achsen im drei- und zweidimensionalen Fall, sagt man ***Ursprung*** oder auch ***Nullpunkt***. Die Position eines Objekts ist durch die Angabe seiner ***Koordinaten*** eindeutig bestimmt.

1.9 Die Kinematik des Massenpunktes

Für das Verständnis der physikalischen Welt ist eine genaue Beschreibung von Bewegungen enorm wichtig. Bei Bewegungen kann man nach dem „warum" und „wie" fragen, also nach Ursache und Wirkung. Wir werden uns zu Beginn nur mit dem „wie" beschäftigen und die Ursache einer Bewegung ignorieren.

Betrachtet man eine Bewegung ohne die Ursache mit einzubeziehen, so spricht man von Kinematik.

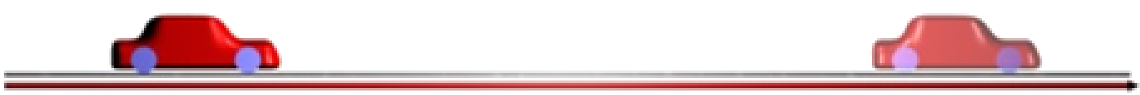
Es ist zur Vereinfachung zweckmässig, die Bewegung eines Objekts als Punktbewegung anzusehen. So wird z.B. ein fahrendes ein Auto ganz einfach als bewegter ***Massepunkt*** beschrieben. Wir denken uns also die ganze Masse des Objekts in einem Punkt konzentriert, seinem ***Schwerpunkt***. Dann müssen wir uns nicht mehr darum kümmern, was das bewegte Objekt sonst noch tun kann (z.B. rotieren).

1.9.1 Bewegungen in einer Dimension

Wir wollen uns zunächst nur auf Bewegungen konzentrieren, die sich in einer Dimension abspielen. Ein Objekt kann sich in so einem Koordinatensystem nur vorwärts oder rückwärts bewegen. Zunächst definieren wir immer einen Ursprung. Relativ zu diesem wird ein bewegtes Objekt dann seinen Ort verändern.
Bewegt sich ein Objekt von der Stelle x_1 zur Stelle x_2, so beträgt die *Änderung seiner Position* $x_2 - x_1$. Für die Änderung einer Grösse wir in der Physik der griechische Buchstabe ***Delta*** Δ verwendet. So können wir für die Verschiebung Δx eines Punktes von x_1 nach x_2 schreiben:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \tag{1}$$

Die grafische Darstellung sieht dann folgendermassen aus



Umgangssprachlich entspricht die Verschiebung Δx einfach der zurückgelegten Strecke.

1.9.2 Die allgemeine Änderung von Grössen

Für die unter 1.9.1 betrachtete Verschiebung Δx brauchte das Fahrzeug natürlich auch eine gewisse Zeitspanne. Es befand sich zu zwei verschiedenen Zeitpunkten an zwei verschiedenen Orten: Zum *Zeitpunkt* t_1 am Ort x_1 und zum Zeitpunkt t_2 am Ort x_2. Für die Verschiebung Δx benötigte das Fahrzeug somit die *Zeitspanne*

$$\Delta t = t_2 - t_1 \tag{2}$$

Allgemein wird die Änderung einer physikalischen Grösse G immer in der Form

$$\Delta G = G_{Endwert} - G_{Anfangswert} \tag{3}$$

geschrieben.

1.9.3 Graphische Darstellung einer Bewegung

Zu einer Bewegung gehört nebst dem Ort, also wo sich ein Objekt befindet, auch noch die Zeit, also wann sich ein Objekt am entsprechenden Ort befindet. Verfolgt man eine Bewegung, erhält man eine ***Wertetabelle***:

Ort [m]	0	50	70	85	85	100	80	90	100
Zeit [s]	0	2	3	3.5	4	5	7	9	12

Solche Tabellen sind generell unhandlich, weil man Abhängigkeiten schlecht erkennen kann. Einiges besser sind sogenannte Graphen, in denen man die eine Grösse auf der einen Achse und die andere gemessene Grösse auf der zweiten Achse aufträgt. Für unser Beispiel können wir aus den gemessenen Daten ein sogenanntes ***Ort – Zeit Diagramm*** anfertigen. D.h. wir tragen auf der y-Achse den Ort und auf der x-Achse die Zeit ein. Jeder gemessene Punkt lässt sich so im Diagramm einzeichnen, wie das in Abbildung 5 gezeigt ist. Durch eine solche Darstellung hat man einen viel besseren Überblick über die Bewegung (das Objekt entfernt sich, bleibt stehen, fährt wieder in Richtung des Ursprungs zurück, etc.). Kursverläufe an der Börse werden aus demselben Grund grafisch dargestellt – wir Menschen können Bilder besser verarbeiten als grosse Tabellen.

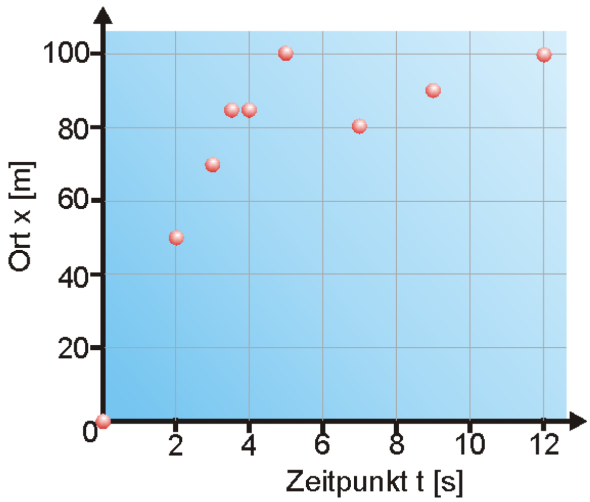


Abbildung 5 Ort Zeit Diagramm

1.9.4 Die gleichförmige Bewegung

1.9.4.1 Die Geschwindigkeit

Der Begriff der Geschwindigkeit ist uns aus dem Alltag geläufig. So darf man Innerorts eine Geschwindigkeit von 50 Kilometern pro Stunde nicht überschreiten! Würde man also mit 50 Kilometern pro Stunde eine Stunde lang fahren, so hätte man dabei eine Strecke von 50 Kilometern zurückgelegt. Übersetzt man diesen Satz in die Sprache der Mathematik, so bekommt man:

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Änderung des Ortes}}{\text{dafür benötigte Zeit}} = \frac{\text{Strecke}}{\text{Zeitspanne}} \tag{4}$$

oder

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{5}$$

Δx ist also lediglich eine andere Schreibweise für die *zurückgelegte Strecke* oder die Ortsänderung und Δt eine andere Schreibweise für die *Zeitspann**e***, welche man gebraucht hat, diese Strecke zurückzulegen. Als Symbol für die Geschwindigkeit verwenden wir das kleine "v" (von engl. "velocity"). Die Einheit der Geschwindigkeit setzt sich zusammen aus den beiden SI Einheiten der Länge und der Zeit:

$$[v] = \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]} = \frac{m}{s} \tag{6}$$

Dabei stehen die eckigen Klammern für "Einheit von…".[3]

Wir verwenden in Zukunft für die Ortsangabe den kleinen Buchstaben s und für die Strecke entsprechend Δs.

Aufgabe: Zeigen Sie, dass eine Geschwindigkeit von 1 m/s auch 3.6 km/h sind!

---

[3] Für die Geschwindigkeit z.B. [v]: sprich: die Einheit von v.

1.9.4.2 Ort–Zeit Diagramm der gleichförmigen Bewegung

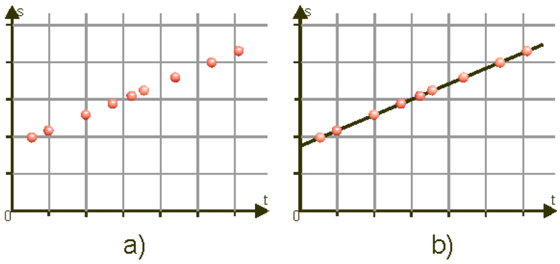


Abbildung 6 Qualitatives Ort-Zeit Diagramm

Betrachten wir einmal ein qualitatives Ort – Zeit Diagramm, einer kriechenden Schnecke, wie es in der nebenstehenden Abbildung 6a) gezeigt ist. Wie man unschwer erkennen kann, liegen die Messpunkte auf einer Geraden. Offensichtlich besteht zwischen den einzelnen Punkten ein linearer Zusammenhang. Deshalb legen wir auch mal eine Gerade durch alle Messpunkte und erhalten so das danebenstehende Diagramm in Abbildung 6b). Wir haben auf diese Weise die Informationen der einzelnen Messpunkte konserviert, können jedoch die Bewegung viel einfacher grafisch darstellen. Im nächsten Schritt überlegen wir uns, ob man nun die Gerade nicht auch in Worten bzw. mit Hilfe der Mathematik beschreiben kann.

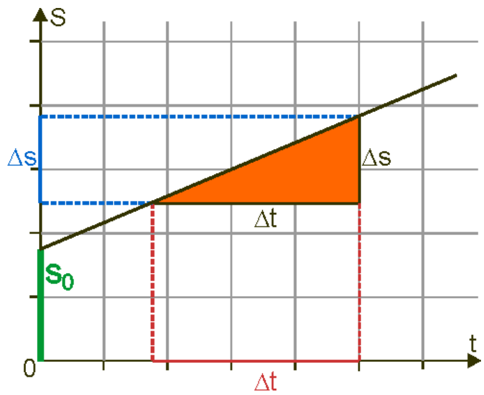


Abbildung 7 Mathematische Beschreibung einer Geraden im Ort – Zeit Diagramm.

In Abbildung 7 sind dazu ein paar Dinge zusätzlich eingetragen. Wie man unschwer erkennen kann, entspricht die Steigung der Geraden gerade dem Quotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ - den kennen wir aber bereits: dahinter verbirgt sich nichts anderes also die Geschwindigkeit! Fassen wir das mal zusammen.

Die Steigung der Geraden im Ort–Zeit Diagramm entspricht gerade der Geschwindigkeit des Objekts im betrachteten Zeitabschnitt Δt.

Aus dem Zusammenhang $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$ folgt aber für die zurückgelegte Strecke umgehend

$$\Delta s = v \cdot \Delta t \qquad (7)$$

Die in einer Zeitspanne zurückgelegte Strecke berechnet sich zu $\Delta s = v \cdot \Delta t$.

Jetzt kann man sich natürlich auch fragen, ***wo*** sich das Objekt zum Zeitpunkt *t* sich gerade befindet. Man braucht also den Ort. Nun, auch das ist ganz einfach. Dazu schreiben wir (7) aus:

$$s_1 - s_0 = v \cdot (t_1 - t_0) \tag{8}$$

und stellen um

$$s_1 = s_0 + v \cdot (t_1 - t_0) \tag{9}$$

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ (die Uhr wird gestartet) befindet sich das Objekt am Ort s_0. Gleichung (9) lautet damit

$$s_1 = s_0 + v \cdot (t_1 - 0) = s_0 + v \cdot t_1 \tag{10}$$

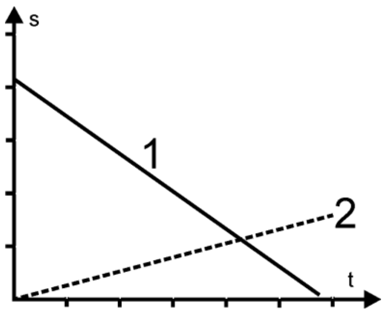
Jetzt kann man auf den Index 1 noch verzichten und man erhält das sogenannte Ort – Zeit Gesetz.

Ort–Zeit Gesetz: $s = s_0 + v \cdot t$

Wenn man also ***s_0*** (den Ort eines Objekts zum Zeitpunkt null) und ***v*** kennt, so kann man den Ort eines Objekts zu jedem Zeitpunkt t angeben – man muss nur noch richtig rechnen. Das bedeutet nichts anderes, als dass diese drei letztgenannten Parameter dieselben Informationen beinhalten, wie eine allfällige Tabelle mit Messwerten!

Beispiel

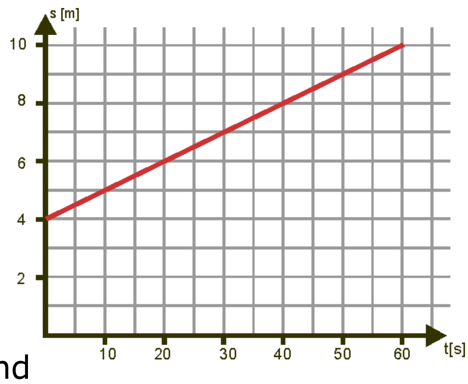
Das folgende Diagramm zeigt die Weltlinien von zwei verschiedenen bewegten Körpern. Welcher dieser Körper besitzt die grössere Geschwindigkeit?



Lösung

Die Steigung der Geraden im Ort–Zeit Diagramm entspricht der Geschwindigkeit des Objekts. Die Steigung der ***Weltlinie*** von Objekt 1 ist betragsmässig grösser als die von Objekt 2. Objekt 1 ist demnach schneller unterwegs.

Beispiel



Wie lautet das Ort–Zeit Gesetz zum gezeigten Ort–Zeit Diagramm?

Lösung

Im Diagramm wählen wir zwei beliebige Punkte auf der Geraden aus. Die Punkte s(10s) = 5m und s(50s) = 9m sind passend. In der Zeitspanne von 10s bis 50 s, also Δt = 40s, legt das Objekt eine Strecke von $\Delta s = 9m - 5m = 4m$ zurück. Die Geschwindigkeit des Objekts beträgt daher $v = \frac{4m}{40s} = 0.1\frac{m}{s}$. Zu Beginn der Messung hat sich das Objekt am Ort $s_0 = 4m$ befunden. Das komplette Ort–Zeit Gesetz lautet also

$$s = 4m + 0.1\frac{m}{s} \cdot t \ .$$

1.9.4.2.1 Kompliziertere Ort–Zeit Diagramme

Natürlich sehen Ort–Zeit Diagramme realer Bewegungen nicht so schön aus, wie im letzten Beispiel dargestellt. Ein Auto im Stadtverkehr wird zum Beispiel kaum mit konstanter Geschwindigkeit dieselbe durchqueren können. Das entsprechende Ort–Zeit Diagramm könnte so aussehen, wie in Abbildung 8 gezeigt ist.

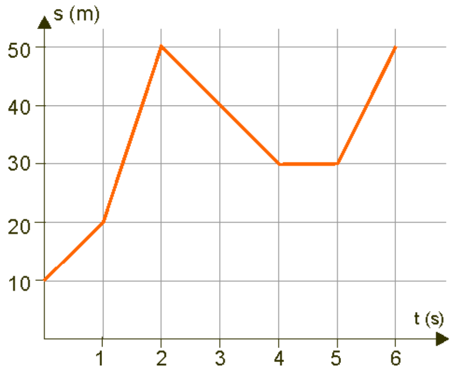


Abbildung 8 Auto im Stadtverkehr?

Zunächst fällt einmal auf, dass das Diagramm aus mehreren Abschnitten (A bis E) besteht (Abbildung 9), in welchen die jeweilige Weltlinie einer Geraden entspricht. Die Geschwindigkeiten für die einzelnen Abschnitte lassen sich ganz einfach ermitteln; sie entsprechen ja einfach den Steigungen der Weltlinien in den entsprechenden Abschnitten. Die Resultate sind in Tabelle 3 gezeigt.

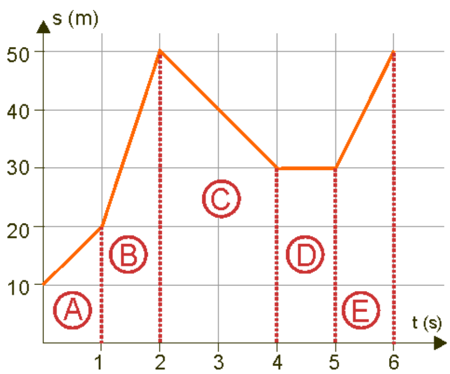


Abbildung 9 Unterschiedliche Abschnitte im Ort-Zeit Diagramm.

Das zuletzt behandelte Ort–Zeit Diagramm entspricht aber immer noch nicht einer realen Bewegung, weil in Wirklichkeit kaum ein Objekt so ruckartig seine Geschwindigkeit ändert. Die Realität sieht vielmehr etwa so aus, wie im nächsten Diagramm (Abbildung 10) gezeigt. Nun erkennt man kaum noch Bereiche, in denen die Steigung der Kurve und damit die Geschwindigkeit konstant sind. Um die Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt zu erhalten, müsste man die Steigung der Weltlinie an diesem Ort ermitteln.

Tabelle 3

Abschnitt	A	B	C	D	E
Δs [m]	10	30	-20	0	20
Δt [s]	1	1	2	1	1
v [m/s]	10	30	-10	0	20

Es gibt allerdings Orte, für die man aber direkt eine quantitative Aussage zur Geschwindigkeit machen kann: bei den grünen Punkten ist die Steigung der Weltlinie null – also auch die Geschwindigkeit an diesen Orten. Beim blauen Punkt ist die Steigung der Ort–Zeit Kurve maximal, also auch die Geschwindigkeit.

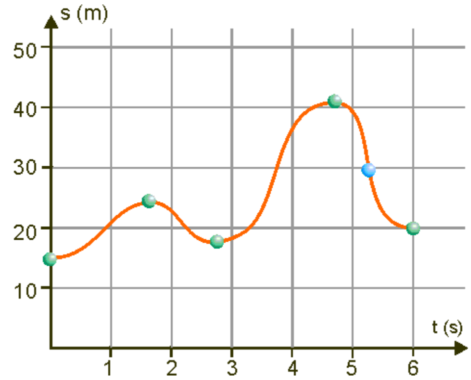
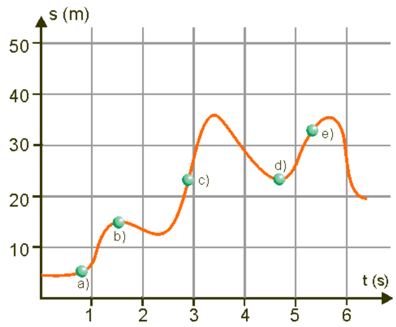


Abbildung 10 Schon fast ein realitätstreues Ort-Zeit Diagramm.

Beispiel

Ordne die Geschwindigkeiten der markierten Punkte in nebenstehendem Diagramm der Reihe nach, die Grösste zuerst.



Lösung

Die Steigung der Kurve im Ort–Zeit Diagramm entspricht der Geschwindigkeit. Dementsprechend lautet die Einteilung

$$v_c > v_e > v_a > v_b = v_d$$

Wichtig: Bei solchen Fragen müssen in der Lösung immer die mathematischen Vergleichsoperatoren vorhanden sein. Ebenfalls ist ein kurzer Begründungssatz notwendig!

1.9.4.3 Geschwindigkeit – Zeit Diagramm der gleichförmigen Bewegung

Nehmen wir als Ausgangspunkt das Ort–Zeit Diagramm aus Abbildung 11. Das dazugehörige Geschwindigkeit–Zeit Diagramm folgt in Abbildung 12.

Das ***Geschwindigkeit–Zeit Diagramm*** (Abbildung 12) der gleichförmigen Bewegung ergibt eine zur Zeitachse horizontale Gerade, da die Geschwindigkeit im Zeitabschnitt t_1 bis t_2 ja konstant bleibt. Der Wert dieser Geschwindigkeit werde mit v_0 bezeichnet.

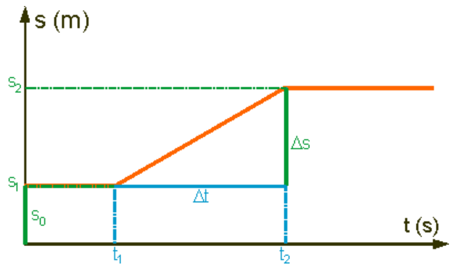


Abbildung 11 Noch ein Ort – Zeit Diagramm.

Betrachten wir einmal die markierte Fläche, welche im Geschwindigkeit–Zeit Diagramm von der Geschwindigkeitskurve eingeschlossen wird. Diese berechnet sich nach $v_0 \cdot \Delta t$, was aber nach (7) gerade der Strecke Δs entspricht!

Verallgemeinert lautet die Erkenntnis:

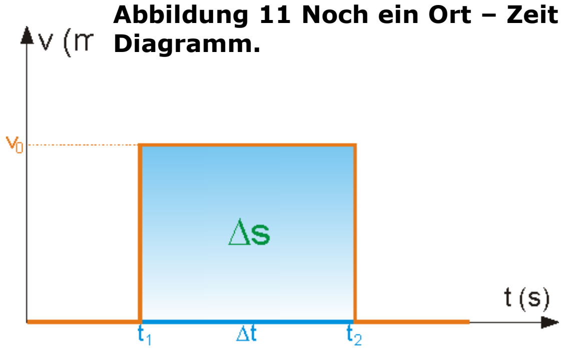


Abbildung 12 Geschwindigkeits – Zeit Diagramm

Die von der Kurve im Geschwindigkeit–Zeit Diagramm im Zeitintervall Δt eingeschlossene Fläche entspricht in diesem Zeitintervall zurückgelegten Strecke Δs!

Das tolle an diesem Satz ist: Er gilt auch für Bewegungen, bei denen die Geschwindigkeit nicht konstant ist (Abbildung 13). In diesen Fällen lässt sich lediglich die Fläche mathematisch nicht mehr ganz so einfach ermitteln. Man braucht dafür die Integralrechnung, welche Sie aber erst viel später lernen werden.

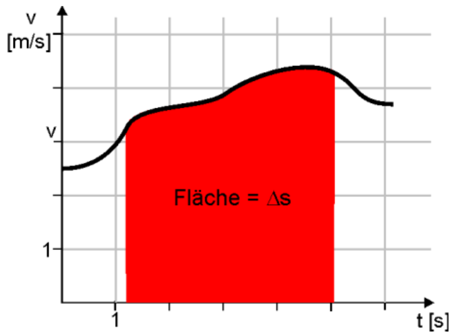
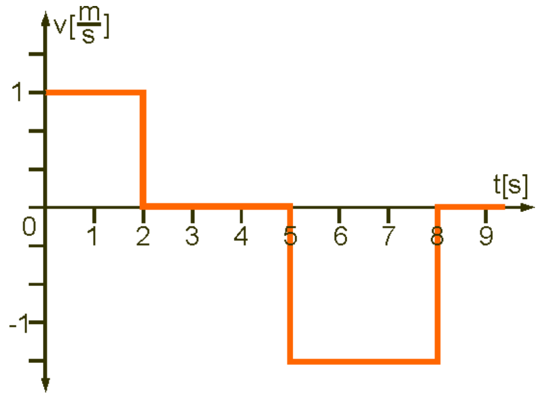


Abbildung 13 Die Fläche unterhalb der Kurve im v-t Diagramm entspricht dem zurückgelegten Weg.

Beispiel

Die Bewegung eines Objekts führt zum abgebildeten Geschwindigkeit–Zeit Diagramm. Welche Strecke hat das Objekt in der betrachteten Zeitspanne zurückgelegt?

Lösung

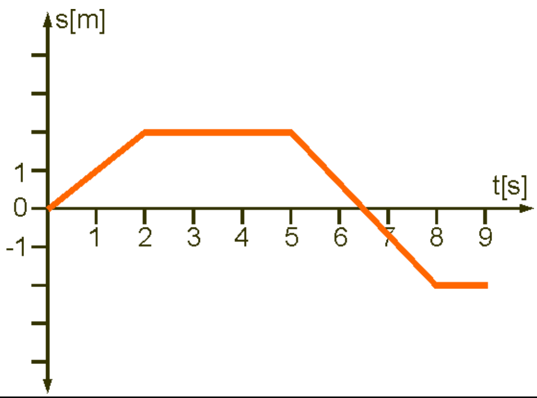


Die Strecke entspricht der Fläche unter der Kurve im Geschwindigkeit–Zeit Diagramm. Im Zeitraum von 0s bis 2s ($\Delta t_1 = 2s$) besitzt das Objekt eine Geschwindigkeit von $v_1 = 1\frac{m}{s}$. Die in diesem Zeitabschnitt zurückgelegte Strecke beträgt also $\Delta s_1 = v_1 \cdot \Delta t_1 = 1\frac{m}{s} \cdot 2s = 2m$. Von 2s bis 5s besitzt das Objekt keine Geschwindigkeit, es legt also auch keinen Weg zurück. Von 5s bis 8s ($\Delta t_2 = 3s$) ist der Körper nun mit einer Geschwindigkeit von $\Delta v_2 = -1\frac{1}{3}\frac{m}{s}$ unterwegs. Die in diesem Zeitabschnitt zurückgelegte Strecke beträgt also $\Delta s_2 = v_2 \cdot \Delta t_2 = -1\frac{1}{3}\frac{m}{s} \cdot 3s = -4m$.

Wie müssen wir diese negative Strecke interpretieren? Auf zweierlei Arten. Wenn man nun fragt, welchen Weg das Objekt ***insgesamt*** zurückgelegt hat, so zählt man die ***Beträge*** der beiden Teilstrecken zusammen und erhält $|\Delta s_1| + |\Delta s_2| = 2m + 4m = 6m$. Fragt man hingegen, wie weit der Körper nach 8 Sekunden von seinem Startpunkt entfernt ist, so zählt die beiden Teilstrecken unter Berücksichtigung der Vorzeichen zusammen und bekommt $\Delta s_1 + \Delta s_2 = 2m - 4m = -2m$. Der Endpunkt der Bewegung liegt also 2m ***hinter*** dem Startpunkt!

Wie sieht das dazugehörige Ort–Zeit Diagramm aus, wenn sich das Objekt zum Zeitpunkt null am Ort s_0 = 0m befunden hat?

Lösung



1.9.4.4 Die Momentangeschwindigkeit

Genau genommen haben wir bei den meisten Problemen bisher mit ***Durchschnittsgeschwindigkeiten*** gearbeitet. Gewisse Instrumente können uns die Geschwindigkeit eines Objektes zu einem genau definierten Zeitpunkt angeben. Hierzu gehören z.B. der Tachometer eines Fahrzeuges oder auch die Radareinrichtungen der Polizei[4]. An diesen Geräten lesen wir die ***Momentangeschwindigkeit*** ab.

1.9.5 Die gleichmässige Bewegung

Ändert sich die Geschwindigkeit mit der Zeit, so spricht man allgemein von einer beschleunigten Bewegung.
Wir messen die Geschwindigkeit eines Objekts auf einer leicht geneigten Bahn als Funktion der Zeit. Die Daten werden elektronisch aufgezeichnet. Qualitativ ergibt sich im Geschwindigkeit–Zeit Diagramm ein Bild wie in Abbildung 14, wobei zunächst nur die ausgezogene schwarze Linie betrachtet werden soll.

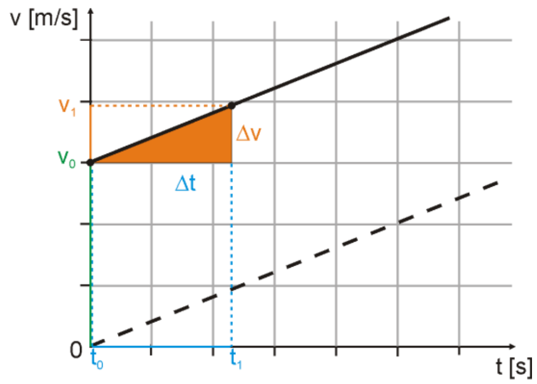


Abbildung 14 Geschwindigkeit – Zeit Diagramm einer gleichmässigen Bewegung

Die Geschwindigkeit ändert sich im Verlaufe der Bewegung; sie nimmt zu. Die Geschwindigkeit v_0 zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ist von null verschieden. Die aufgezeichneten Daten liegen auf einer Geraden – die Geschwindigkeit nimmt also mit der Zeit ***linear*** zu.

Ergibt sich im v–t Diagramm eine Gerade, so spricht man von einer gleichmässig beschleunigten Bewegung.

Die Steigung der Geraden im v–t Diagramm der gleichmassig beschleunigten Bewegung beträgt natürlich $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ (ganz analog zur Definition der Geschwindigkeit $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$). Oder anders formuliert, bei der geradlinig gleichmassig beschleunigten Bewegung bleibt die Geschwindigkeit, mit der sich die Geschwindigkeit ändert konstant. Oder anders formuliert: Die Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit ist konstant.
Da es in den Naturwissenschaften wichtig ist zu wissen, wie schnell sich die Geschwindigkeit mit der Zeit verändert, hat man dieser Grösse einen eigenen Namen gegeben und ***Beschleunigung*** genannt. Das Symbol für die

[4] streng genommen messen auch die Radargeräte eine Durchschnittsgeschwindigkeit, jedoch ist die Zeitspanne zwischen zwei Messungen sehr kurz. Deshalb kann man in diesem Zusammenhang durchaus von Momentangeschwindigkeit sprechen.

Beschleunigung ist ein kleines ***a*** (für *acceleration*). Mathematisch lässt sich die Beschleunigung ausdrücken als:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_1-v_0}{t_1-t_0} \qquad (11)$$

mit der Einheit

$$[a]=\frac{[\Delta v]}{[\Delta t]}=\frac{\frac{m}{s}}{s}=\frac{m}{s\cdot s}=\frac{m}{s^2} \qquad (12)$$

1.9.5.1 *Geschwindigkeit – Zeit Diagramme der gleichmässig beschleunigten Bewegung*

Aus dem v–t Diagramm in Abbildung 14 lässt sich die *Änderung der Geschwindigkeit als Funktion der Zeit* direkt ablesen.

$$\Delta v=\frac{\Delta v}{\Delta t}\cdot\Delta t=a\cdot\Delta t \qquad (13)$$

Fragt man hingegen nach der *Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t*, so bekommt man durch Umstellen von (11) zunächst

$$v_1=v_0+a\cdot(t_1-t_0)\,. \qquad (14)$$

Weil $t_0=0$ ist entspricht t_1 dem Zeitpunkt t. Wir ersetzen also in (14) t_1 durch t, v_1 entsprechend durch v und erhalten das ***Geschwindigkeit-Zeit Gesetz***

$$v=v_0+a\cdot t \qquad (15)$$

für die gleichmassig beschleunigte Bewegung.

Auch bei der gleichmässigen Bewegung gilt natürlich, wie in Abschnitt 1.9.4.3 gesehen haben, dass der zurückgelegte Weg der Fläche unter der Kurve im v–t Diagramm entspricht. Aus dem Geschwindigkeit-Zeit Diagramm in Abbildung 15 soll nun die Strecke allgemein ermittelt werden.

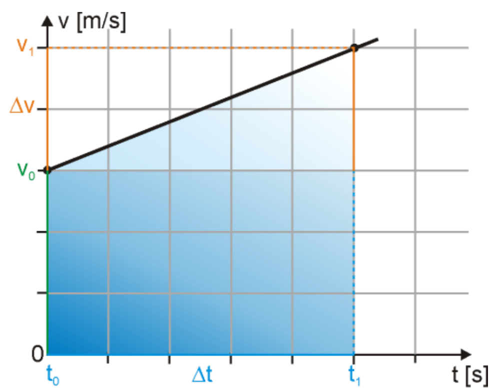


Abbildung 15 Fläche unter der Kurve im v-t Diagramm.

Wie man unschwer erkennen kann, hat die blau hervorgehobene Fläche in Abbildung 15 die Form eines Trapezes. Unter Berücksichtigung der Flächenformel für ein Trapez[5] können wir gleich

$$\Delta s = \frac{v_0 + (v_0 + \Delta v)}{2} \cdot \Delta t = \frac{2v_0 + \Delta v}{2} \cdot \Delta t = v_0 \cdot \Delta t + \frac{\Delta v}{2} \cdot \Delta t \qquad (16)$$

schreiben. Unter Berücksichtigung von $\Delta v = a \cdot \Delta t$ folgt dann

$$\Delta s = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 \,. \qquad (17)$$

Mit (17) kann man nun die Frage beantworten wie weit ein Objekt gefahren ist. Können wir denn aber auch ermitteln, wo sich das Objekt zu einem gewissen Zeitpunkt befindet? Lösen wir dazu (17) mal nach dem Ort auf:

$$s_1 = s_0 + v_0 \cdot (t_1 - t_0) + \frac{1}{2} a (t_1 - t_0) \,. \qquad (18)$$

Nur wenn bekannt ist, an welchem Ort s_0 sich das Objekt zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ aufhielt, ist s_1 bestimmt. Falls das der Fall ist, setzen wir wieder $t = t_0$ und $s = s_1$. Das ***Ort–Zeit Gesetz*** für die gleichmässig beschleunigte Bewegung lautet dann

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \qquad (19)$$

Wie man Gleichung (19) entnehmen kann, kommt die Zeit quadratisch vor. Dies macht sich auch im Ort–Zeit Diagramm bemerkbar, wie in

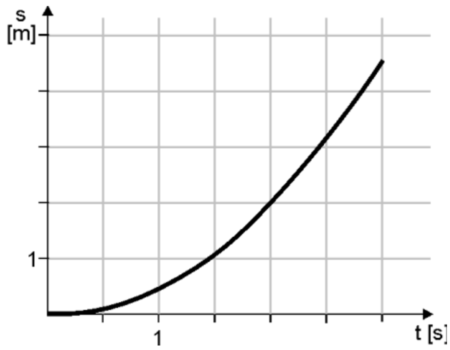
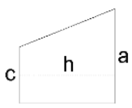


Abbildung 16 Ort-Zeit Diagramm der gleichmässig beschleunigten Bewegung: Keine Gerade mehr!

Ein Kommentar noch zum Vorzeichen: die Beschleunigung kann positive und negative Werte annehmen. Im ersten Fall nimmt die Geschwindigkeit mit der Zeit zu (Gas geben), im zweiten Fall nimmt die Geschwindigkeit mit der Zeit ab (bremsen). Man spricht dann von einer ***verzögerten*** Bewegung.

---

[5] $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$, wobei hier das Trapez einfach liegt.



Beispiel

Der neue Airbus A380 hebt typischerweise bei einer Geschwindigkeit von rund 378 km/h ab. Die vier Triebwerke entwickeln dabei eine Beschleunigung von etwa 3.64 m/s^2. Die Masse des Flugzeugs beträgt dabei rund 341 Tonnen, 275 Tonnen Leergewicht und 66.4 Tonnen übliche Nutzlast.

Airbus A380 bei einer Flugzeugschau im Juni 2006. Quelle: Wikipedia

Wie lange dauert der Startvorgang?

Lösung

Aus $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ folgt gleich $\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{105\frac{m}{s} - 0\frac{m}{s}}{3.64\frac{m}{s^2}} \approx 28.8s$.

Wie lange muss die Startbahn mindestens sein?

Lösung

Für die Strecke bei der gleichmässig beschleunigten Bewegung gilt
$\Delta s = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 = 0m + \frac{1}{2} \cdot 3.64\frac{m}{s^2} \cdot (28.8s)^2 \approx 1513m$.
Wir haben bei dieser Rechnung natürlich alle Widerstandskräfte ausser Acht gelassen (Rollreibung, Luftwiderstand), weshalb die wirkliche Startstrecke grösser sein wird. Als Mindestlänge für eine Startbahn findet man den Wert von 4km. Darin sind aber noch gewisse Sicherheitsparameter berücksichtigt.

1.9.6 Würfe

1.9.6.1 Der freie Fall

Galileo Galilei hatte schon bemerkt, dass die Gestalt und die Masse eines Körpers keinen Einfluss auf den freien Fall haben.

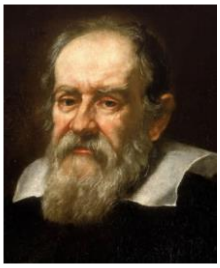


Abbildung 17Galileo Galilei 1564-1642. Quelle: www.wikipedia.de

Ohne einen äusseren Einfluss (Luft) benötigen alle fallenden Körper aus der Ruhe heraus für gleiche Weglängen die gleiche Zeit.

Die Beschleunigung, welche ein Körper beim freien Fall erfährt, ist am selben Ort für alle Körper gleich. Dieser Beschleunigung sagt man ***Fallbeschleunigung*** oder ***Ortsfaktor***. Als Symbol verwendet man den Buchstaben g. Die Fallbeschleunigung hängt von der geographischen Breite des Ortes und der Höhe über Meer ab[6]. Wir arbeiten mit einem mittleren Wert der Fallbeschleunigung auf der Erde von

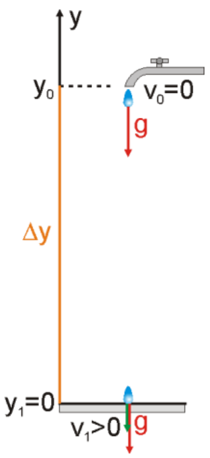
$$\bar{g} = 9.81\frac{m}{s^2}. \tag{20}$$

Beispiel

Ein Wasserhahn tropft vor sich hin. Der Hahn ist 30 cm vom Aufschlagspunkt des Tropfens im Wasserbecken entfernt.
Mit welcher Geschwindigkeit schlägt der Tropfen im Waschbecken auf?

Vorbereitung: Zunächst wird eine Skizze erstellt. Darin zeichnet man das gewünschte Koordinatensystem ein und die wichtigsten am Problem beteiligten physikalischen Grössen ***mit*** Richtung, wie das in der nebenstehenden Abbildung gemacht wurde. Anschliessend schreibt man die gegebenen und die gesuchten Grössen hin:

Lösungsskizze



Gegeben

$$y_0 = +30cm = +0.3m$$

$$y_1 = 0m$$

$$v_0 = 0\frac{m}{s}$$

$$a = -g = -9.81\frac{m}{s^2}$$

Man beachte, dass die Fallbeschleunigung negativ ist, weil die y-Achse nach oben als positiv definiert wurde!

Gesucht

$$v_1 = ?$$

Lösung

Die Geschwindigkeit bei der gleichmässig beschleunigten Bewegung berechnet sich aus $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ zu

$$\Delta v = v_1 - v_0 = a \cdot \Delta t,$$

respektive unter Berücksichtigung von $v_0 = 0\frac{m}{s}$.

---

[6] Dazu mehr im nächsten Schuljahr…

$$v_1 = a \cdot \Delta t$$

Die Beschleunigung ist gegeben. Für die weitere Rechnung fehlt aber die Zeit. Allerdings wissen wir auch, dass für die Fallstrecke Δy gilt $\Delta y = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2$, wobei wir $v_0 = 0 \frac{m}{s}$ berücksichtigt haben und bekommen für die Fallzeit

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\Delta s}{a}} .$$

Dies setzen wir in die Formel für die Geschwindigkeit ein und erhalten

$$v_1 = a \cdot \Delta t = a \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta y}{a}} = -9.81 \frac{m}{s^2} \sqrt{\frac{2 \cdot (-0.3m)}{-9.81 \frac{m}{s^2}}} = -2.42 \frac{m}{s} \approx -2.4 \frac{m}{s} .$$