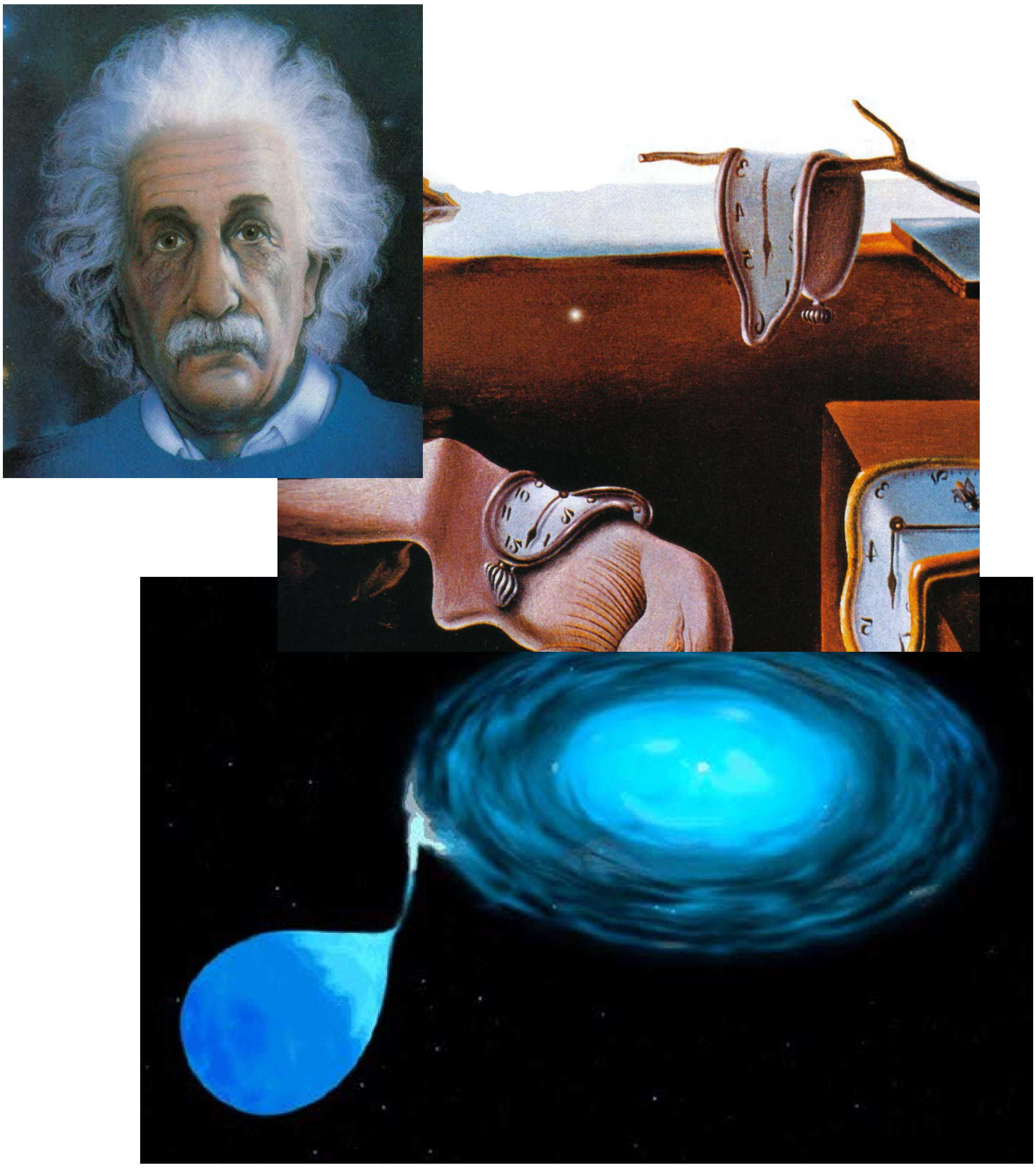
Eine kurze Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie



Inhaltsverzeichnis

16.1 Das Newtonsche Relativitätsprinzip / Galilei – Transformation

Stellen wir uns die Frage, wer oder was bewegt sich eigentlich, wenn sich ein Körper gegenüber einem anderen bewegt. Galileo Galilei hat diese Frage sehr kurz beantwortet: Beide Körper bewegen sich immer „relativ“ zueinander. Dies soll an einem Beispiel erläutert werden. Fährt ein Zug an einem Bahnsteig vorüber, so fährt dieser aus der Sichte der Leute auf dem Bahnsteig an ihnen vorbei. Für die Fahrgäste im Zug hingegen bewegt sich der Bahnsteig mit den Wartenden an ihnen vorbei. Dies tönt eigentlich recht simpel, hat aber eine grosse Tragweite. Es heisst nichts anderes, als dass jeder für sich behaupten kann, dass er selbst ruhend ist und sich die anderen bewegen. Stellen wir uns nun vor, dass sich der Zug (Bezugssystem Zug) mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt. Dass er konstanter Geschwindigkeit fährt, ist eine Notwendigkeit: Ansonsten würden die Fahrgäste und alle Körper im Zug eine für sie nicht nachvollziehbare Beschleunigung erfahren und das erste Newtonsche Axiom würde nicht mehr gelten. Bezugssysteme, in welchen das erste Newtonsche Axiom gilt, nennt man Inertialsysteme. Im Zug (wir sagen ihm nun Inertialsystem Zug) machen Physiker Experimente mit einem fallenden Ball, um die Fallbeschleunigung zu ermitteln. Das gleiche Experiment macht eine zweite Gruppe Physiker auf dem Bahnsteig (Inertialsystem Bahnsteig). Beide Gruppen werden für die Fallbeschleunigung den gleichen Wert erhalten. Keines der beiden Inertialsysteme ist gegenüber dem anderen ausgezeichnet. In beiden gelten dieselben physikalischen Gesetze.
Der zweite wichtige Punkt des Galileischen Relativitätsprinzips ist die Addierbarkeit von Geschwindigkeiten (Additionsprinzip). Bewegen sich zwei Autos mit 50 km/h und 80 km/h aufeinander zu, so bewegen sich relativ zum jeweils anderen Fahrzeug mit einer Geschwindigkeit von 130 km/h. Geht ein Schaffner (falls es ihn denn noch gibt) in einem Zug, welcher mit 100 km/h unterwegs ist, in Fahrrichtung mit 5 km/h, so bewegt er sich von aussen gesehen mit einer Geschwindigkeit von 105 km/h. Dieses (einleuchtende) Rechenverfahren ist als Galilei – Transformation bekannt.
Diese Ergebnisse fasst man im **Newtonschen Relativitätsprinzip** zusammen:

- Raum und Zeit sind absolut
- Alle relativ zu einem Inertialsystem gleichförmig bewegten Bezugssysteme sind ebenfalls Inertialsysteme und im Rahmen der Newtonschen Mechanik gleichwertig.

Dieses Prinzip war Galilei, nach ihm Newton und anderen Wissenschaftlern seit dem 17. Jahrhundert bekannt. Es wurde erst in Frage gestellt, als gegen Ende des 19. Jahrhunderts die Vermutung aufkam, dass sich ein absolutes Bezugssystem finden lasse.

16.2 Die Lichtgeschwindigkeit

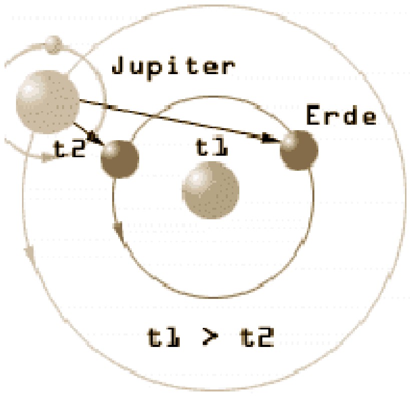
16.2.1 Galileo Galilei (1564-1642)

Bereits Galileo Galilei wollte die Lichtgeschwindigkeit messen, weil er der Ansicht war, dass es sich nicht mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreite. Er stellte sich dazu 1638 eines Nachts, mit einer Laterne bewaffnet auf einen Hügel. Sein Assistent machte dasselbe auf einem etwa 1km entfernten Hügel. Galilei liess seine Laterne kurz aufleuchten. In dem Moment, wo der Assistent Galileos Laterne wahrnahm, liess er ebenfalls seine Laterne aufblitzen. Galileo mass nun die Zeit, welche seit dem Aufleuchten seiner eigenen Lampe vergangen war und dem Zeitpunkt, zu dem er die Laterne seines Assistenten aufleuchten sah. Aus dieser Laufzeitdifferenz und der örtlichen Distanz wollte er die Lichtgeschwindigkeit berechnen. Dies gelang ihm nicht (heute wissen wir warum), er kam aber zum Schluss, dass die Lichtgeschwindigkeit sehr gross sein muss.

Quelle: www.iap.uni-bonn.de

16.2.2 Ole Rømer (1644-1710)

Im 17. Jahrhundert war die Zeitbestimmung für die Orientierung auf hoher See eine grosse Herausforderung. Dazu legte der französische Astronom Giovanni Domenico Cassini, Direktor der Pariser Sternwarte, die Verfinsterung der Jupitermonde in Zeittafeln nieder. Das Jupitersystem war für Giovanni Domenico Cassini ein Miniaturabbild des ganzen Planetensystems, und die ständig variierenden Konstellationen von Jupiter mit seinen Monden galten ihm als Beispiel für das Verhalten der Planeten. Es ist verständlich, dass die Bahnbewegung dieser Monde sorgfältig studiert wurde. Neben unserem Erdmond gehören die vier Galileischen Monde des Jupiter mit Sicherheit zu den bekanntesten Monden im Sonnensystem. Es sind auch die vier grössten Jupitermonde: Io, Europa, Ganymed und Kallisto, benannt nach den vier Geliebten des Göttervaters Zeus, der bei den Römern Jupiter heisst.



Quelle: www.wissenschaft.de

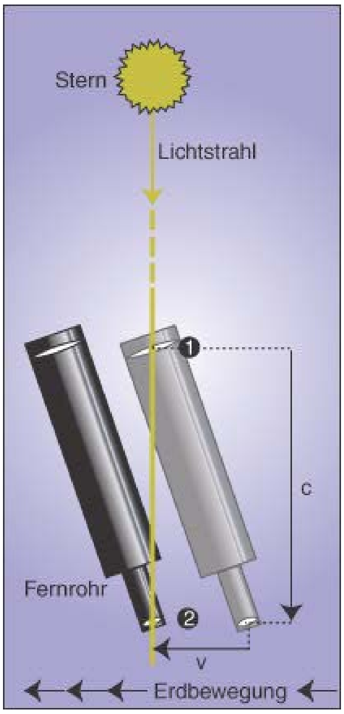
Entdeckt wurden die Monde 1610 von Galileo Galilei, der ihre Bewegungen um Jupiter als Modellfall und Bestätigung dafür ansah, dass die Planeten um die Sonne laufen. Als sich aber der dänische Astronom Ole Römer um 1675 daranmachte, zur Verbesserung dieser Zeittafeln die Satelliten nochmals zu beobachten, stellte er merkwürdige Abweichungen fest. Wenn die Erde dem Jupiter am nächsten war, stimmte alles vorzüglich, doch im Laufe des nächsten halben Jahres „ging Jupiter nach". Schliesslich lief sein Mond fast 1000 Sekunden zu spät durch den dunklen Schatten des Planeten. Römer machte sich auf Fehlersuche und prüfte die Tabellen. Mittlerweile verging wieder ein halbes Jahr, und - welche Überraschung - die Jupiteruhr ging so genau als wäre nichts gewesen.


Seltener Anblick von Io und dessen Schatten auf Jupiter.
Quelle: http://hubblesite.org

Nun liegen die Bahnen der Erde und der Jupitermonde fast in der gleichen Ebene, so dass Römer mit einer einfachen Messung auskam: Er bestimmte zweimal im Jahr die Zeiten, zu denen ein Mond hinter dem Jupiter verschwand (oder auf der anderen Seite wieder auftauchte) und stellte fest, dass sich die Finsternistermine wegen des grösseren Abstands Jupiter - Erde um 15 bis 20 Minuten verschoben. Rømer interpretierte dieses Ergebnis mit einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes: Befindet sich die Erde weiter weg vom Jupiter (in Rømers Experiment ein Erdbahndurchmesser), so trifft das Licht mit einer Verzögerung von 22 Minuten ein – genau die Zeit, die das Licht benötigt, um die Strecke eines Erdbahndurchmessers zu durchlaufen.
Rømer selbst hätte die Lichtgeschwindigkeit berechnen können. Als Mitarbeiter von Giovanni Domenico Cassini hatte er Zugang zum Abstand Erde – Sonne. Er tat es aber nicht (Cassini war der Ansicht, dass sich Licht augenblicklich ausbreite). Rømer spricht in seiner Arbeit lediglich von „Verzögerung“, um auf die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht hinzuweisen.
Erst Christian Huygens berechnete 1678 mit Rømers Werten die Lichtgeschwindigkeit.

16.2.3 James Bradley (1692-1762)

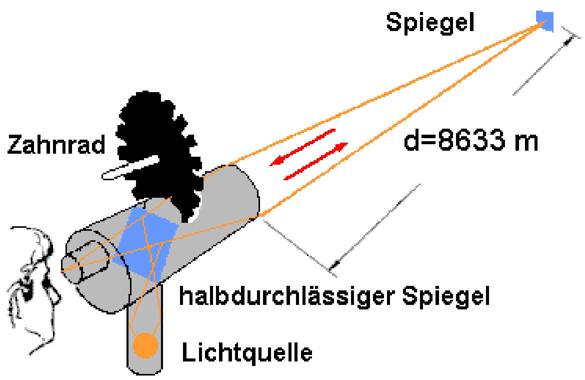
Eine andere astronomische Beobachtung, welche Rückschlüsse auf die Geschwindigkeit des Lichts zuliess, machte James Bradley im Jahre 1728. Er stellte fest, dass Sterne, welche er durch ein Teleskop betrachten wollte, nicht mehr in ihrer mit dem Auge wahrgenommenen Position zu befinden schienen. Er musste die Neigung des Fernrohres ein wenig korrigieren. Der Grund dafür musste sein, dass sich das Fernrohr (bzw. die Erde) während der Zeit, die ein Lichtstrahl von der Linse bis zum Okular braucht, ein wenig weiterbewegt. Bradley mass den Korrekturwinkel und bestimmte mit Hilfe des Wertes für die Lichtgeschwindigkeit von Rømer die Bahngeschwindigkeit der Erde.



Quelle: www.wikipedia.org
Publiziert unter der GFDL

16.2.4 Hyppolite Fizeau (1819-1896)

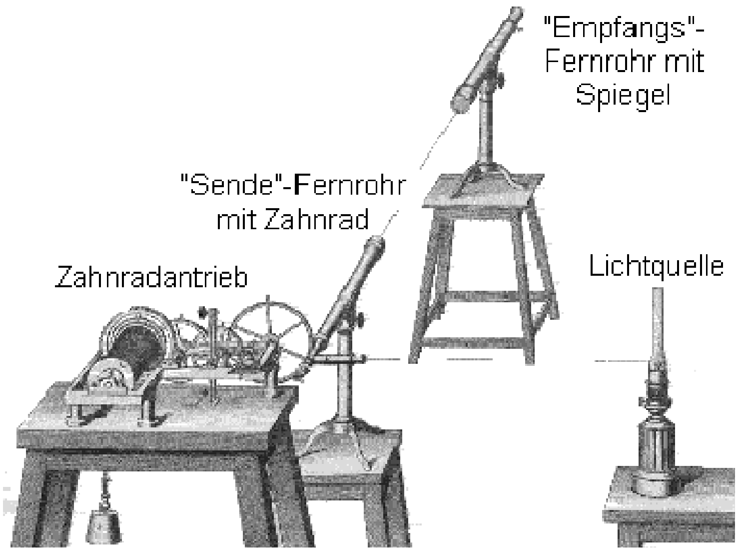
Die erste Messung der Lichtgeschwindigkeit auf der Erde (terrestrische Methode) gelang im Jahre 1848 Hippolyte Fizeau (1819 - 1896) in Paris. Er liess das Licht auf einer fast 9 km langen Strecke laufen (siehe unten). Die Unterbrechung des Lichtes - d.h. die Erzeugung von kurzen Lichtblitzen - erfolgte durch ein sich drehendes Zahnrad mit 720 Zähnen (man beachte den technischen Fortschritt im Vergleich zur Zeit Galileos, als man die Lichtunterbrechung mit der Abdunkelung von Laternen versuchte).



Quelle: www.leifiphysik.de

Dreht sich das Zahnrad nicht oder nur sehr langsam, so kann das Licht, welches von der Quelle über den halbdurchlässigen Spiegel durch eine Zahnradlücke zum entfernten Spiegel läuft, ins Auge des Beobachters gelangen, da das Licht so schnell ist, dass es beim Rücklauf noch die gleiche Lücke passieren kann. Jeder Lichtblitz gelangt also ins Auge des Beobachters, der bei sehr langsamer Zahnraddrehung die Lampe im Takt der Zahnfolge aufblitzen sieht. Bei schneller Umdrehung kommt unser Auge bei den Hell-Dunkel-Wechseln nicht mehr mit, es sieht eine "mittlere" Helligkeit.
Erhöht man die Drehgeschwindigkeit des Zahnrades, so tritt der Fall ein, dass das vom entfernten Spiegel reflektierte Licht auf den Zahn trifft, welcher auf die Lücke folgt, durch die das Licht beim Hinweg lief. Der Beobachter stellt nun Dunkelheit fest. Dies war bei 12,6 Umdrehungen pro Sekunde der Fall.

Fizeau schreibt selber:
"Das erste Fernrohr befand sich im Belvedere eines zu Suresnes gelegenen Hauses, das andere auf der Höhe des Montmartre, in einer Entfernung von beiläufig 8633 Metern. Die Scheibe mit siebenhundert Zähnen versehen, ward von einem durch Gewichte getriebenen Räderwerk, das Hr. Fromet angefertigt hat, in Bewegung gesetzt, und mittelst eines Zählers die Umdrehungsgeschwindigkeit gemessen. Das Licht war das einer Lampe von grosser Helligkeit. Diese ersten Versuche lieferten für die Geschwindigkeit des Lichtes einen Werth, der wenig von dem von den Astronomen angenommenen abweicht. Das Mittel aus 28 bisher angestellten Beobachtungen, gab nämlich diesen Werth zu 70948 Lieus [Meilen], von 25 auf den Grad".



"Annalen der Physik und Chemie 79 (1850) S. 167 ff."

Das entsprach einem Wert der Lichtgeschwindigkeit von 313400 km/s, also einem ca. 5% zu hohen Wert.

16.2.5 Léon Foucault (1819-1868)

Léon Foucault hat 1850 die Lichtgeschwindigkeit, die heute als c = 299792458,0 m/s definiert ist, mit einer zu seiner Zeit hohen Genauigkeit gemessen. Obwohl Fizeau kurz zuvor mit seinem legendären Zahnradexperiment einen ersten Wert für c gefunden hatte, gilt das Foucault-Experiment als überragend.

Grundgedanke der Methode von Foucault zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit:

Ein Lichtstrahl wird von einer Lichtquelle (im unserem Experiment ein Laser) auf einen ebenen Drehspiegel gesendet.

Dieser Drehspiegel lenkt den Lichtstrahl durch eine Linse (f = 5000 mm) auf einen Umlenkspiegel und dieser auf einen Endspiegel.

Die Linse bildet in einer symmetrischen Abbildung (2*f* - 2*f* – Abbildung) die Strahltallie (waist) des Lasers auf den Endspiegel und von dort wieder zurück auf den Schirm ab. Ohne Linse würde der Strahl aufgrund seiner natürlichen Divergenz immer grösser und eine genaue Messung dadurch verunmöglicht.

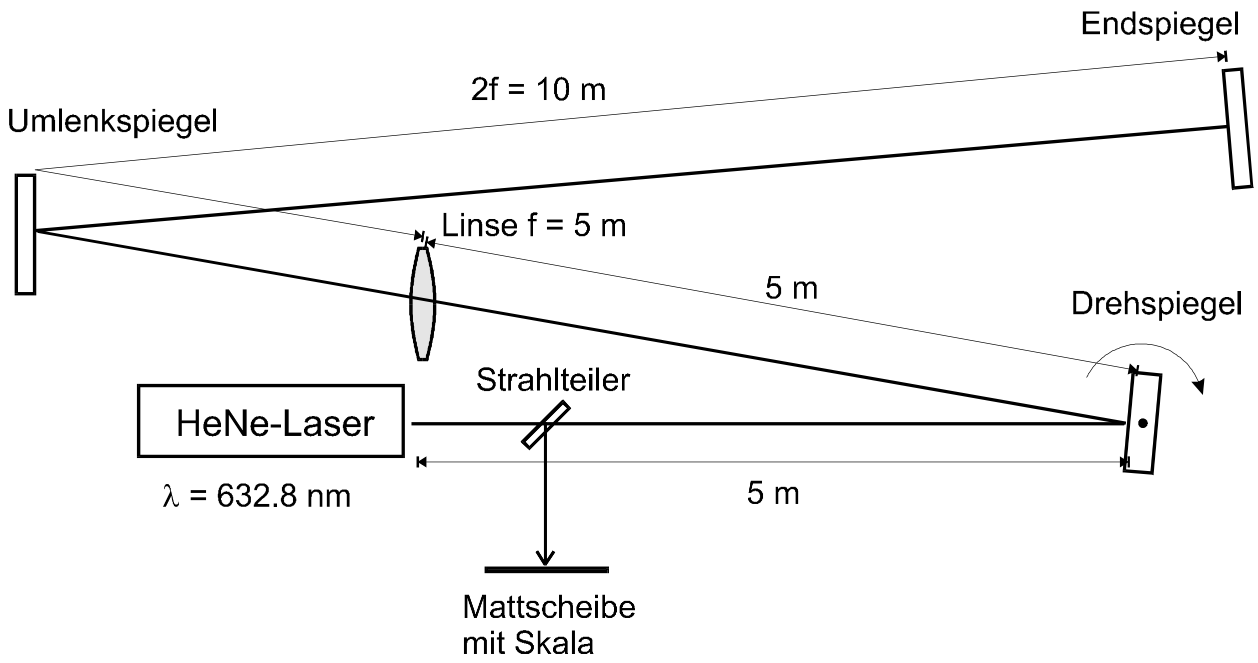
Der Endspiegel ist so justiert, dass der Lichtstrahl den selben Weg zurückläuft bis auf den Drehspiegel, der sich in der Zwischenzeit weitergedreht hat.

Vom Drehspiegel an ergibt sich also für den rücklaufenden Strahl eine leichte Winkelabweichung um den doppelten Drehwinkel des Drehspiegels.

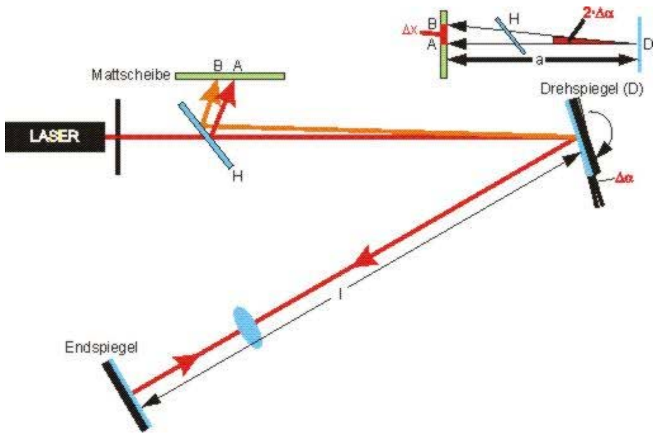
Um diese Abweichung sichtbar zu machen, wird der rücklaufende Strahl durch den Strahlteiler (eine beschichtete Glasplatte mit 50% Reflektivität) auf einen Mattschirm umgelenkt, wo sich eine seitliche Verschiebung des Laserstrahls bei laufendem Drehspiegel feststellen lässt.

Aufgrund der gemessenen Verschiebung lässt sich mit den nachfolgenden Überlegungen die Lichtgeschwindigkeit berechnen.

16.2.6 Versuchsaufbau (Schulexperiment)



16.2.6.1 Auswertung: Berechnung von c aus den Messdaten



Zur Auswertung des Experimentes benötigen wir als erstes den **Lichtweg *l*,** den das Licht zwischen Drehspiegel und Endspiegel (hin und zurück) zurücklegt.

In unserem Experiment gilt:

$$2l = c \cdot \Delta t = 30\,m \qquad (1)$$

In der Zeit $\Delta t = \frac{c}{2l}$ dreht sich der Drehspiegel um den Winkel **Δα** weiter, womit der Strahl um den Winkel **2·Δα** aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird. Beachte, dass Δα der Winkel zwischen Lot und einfallendem bzw. ausfallendem Strahl ist.

Die Distanz zwischen Drehspiegel und Mattschirm sei a (s. Abbildung oben rechts), die Verschiebung auf der Mattscheibe sei Δx, dann gilt:

$$\frac{\Delta x}{a} = 2 \cdot \Delta\alpha \;\Rightarrow\; \Delta\alpha = \frac{\Delta x}{2 \cdot a} \qquad (2)$$

Rotiert der Drehspiegel mit der Frequenz *f*, so gilt unter Verwendung von Gleichungen (1) und (2) für die Winkelgeschwindigkeit ω:

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\Delta x \cdot c}{2 \cdot a \cdot 2l} \qquad (3)$$

Gleichung (3) lässt sich nun nach c auflösen und wir erhalten:

$$c = \frac{8\pi \cdot f \cdot a \cdot l}{\Delta x} \qquad (4)$$

16.2.6.2 Experimentdurchführung

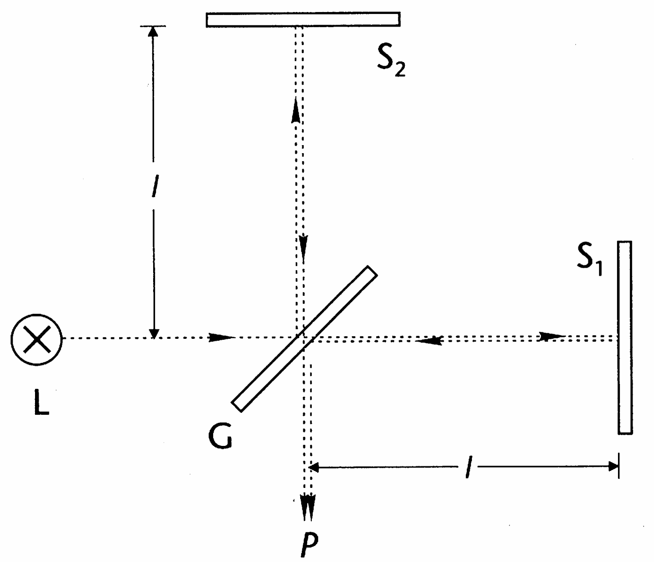
Bestimmen Sie die exakten Distanzen sowie die Frequenz des Drehspiegels im aufgebauten Schulexperiment und berechne aus den Messdaten die Lichtgeschwindigkeit.

16.3 Die Äthertheorie

Mehr als 200 Jahre lang beherrscht die Mechanik, wie Newton sie formulierte, die Physik und prägt damit das Weltbild. Erst im 19. Jahrhundert beginnt sie zu wanken. Neuerdings glauben die Anhänger der Thermodynamik alle Beobachtungen mit dem Begriff der Energie erklären zu können. Daneben gibt es das Gebiet der Elektrodynamik. Dessen Anhänger deuten das Geschehen der Welt mit der Theorie des Elektromagnetismus und den darin vorkommenden Feldern. Es tobt also ein Kampf der „Weltbilder“ zu diesem Zeitpunkt.
Hendrik Lorentz hat 1885 die Theorie des Elektromagnetismus von James Clerk Maxwell erweitert. Diese erklärt alle magnetischen, elektrischen und optischen Erscheinungen in einheitlicher Art und Weise. Wie schon verschiedene Physiker vor ihm geht Lorentz von der Annahme eines Äthers aus. Diese Hilfskonstruktion führten die Physiker in ihren Theorien ein, um die Bewegung des Lichtes und anderer elektromagnetischer Wellen als mechanischen Vorgang erklären zu können. Dieser Äther, ein masseloser, starrer Stoff, sollte den gesamten Raum einnehmen und alle Körper durchdringen.

16.3.1 Albert Michelson (1852-1931) und Edward Morley (1838-1923)

Da der Äther alles durchdringen sollte, müsste sich doch die Bewegung der Erde durch den Äther bemerkbar machen. Das Licht müsste, je nachdem ob es ihn Flug oder gegen die Flugrichtung der Erde ausgesendet wird, einen „Rückenwind“ oder einen „Gegenwind“ verspüren. Man müsste also durch geeignete Experimente in der Lage sein, unterschiede in der Lichtgeschwindigkeit festzustellen. Je nachdem, in welche Richtung sich das Licht auf der Erde ausbreitet. Genau dies haben Michelson und Morley versucht.

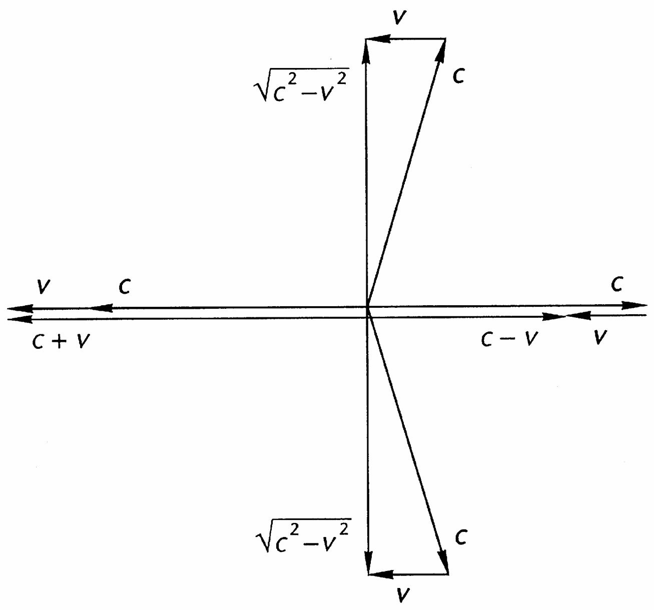


Sie bauten dazu ein Interferometer auf. Licht aus der Lichtquelle L trifft auf eine halbdurchlässig verspiegelte Glasplatte G. Dort wird es in einen durchgehenden und einen reflektierten Strahl gleicher Helligkeit geteilt. Beide Strahlen legen rechtwinklig zueinander dieselbe Entfernung *l* zurück und werden dann jeweils von den Spiegeln S_1 und S_2 zurück nach G reflektiert. Dort werden sie beide teils hindurchgelassen und teils reflektiert.
Im Punkt P beobachtet man die Interferenz der beiden Lichtwellen, die die gleich langen Wege LGS_1GP und LGS_2GP zurückgelegt haben. Ein Interferenzmaximum tritt auf, wenn beide Wellen gleichphasig ankommen, ein Interferenzminimum, wenn sie gegenphasig ankommen.

Wenn sich die Laufzeiten auf beiden Wegen nur um eine halbe Schwingungsperiode der Lichtwelle unterscheiden, lässt sich dies im Interferenzbild bereits erkennen. Solche Laufzeitunterschiede sind bei hinreichender Armlänge *l* wegen der Bewegung der Erde durch den Äther zu erwarten.

Vorausgesetzt, dass der Äther existiert, gelten folgende Überlegungen: Der ruhende Äther stellt ein absolutes Bezugssystem dar. In ihm breitet sich das Licht in jeder Richtung mit derselben Geschwindigkeit $c = 3.00 \cdot 10^8$ m/s aus, nicht aber in Bezugssystemen, die sich relativ zum Äther gleichförmig bewegen.

Nehmen wir an, die Erde und mit ihr der obige Versuchsaufbau (Michelson-Interferometer) bewegen sich im Äther mit der Geschwindigkeit v von links nach rechts. Dann bewegt sich der Äther – vom Bezugssystem der Erde aus gesehen – mit der Geschwindigkeit v von rechts nach links (am besten stellt man sich einen "Ätherwind" vom Betrag v in Pfeilrichtung → vor).



Die Lichtgeschwindigkeit in diesem irdischen Bezugssystem ist dann nicht mehr in alle Richtungen gleich c, sondern berechnet sich durch vektorielle Addition von c und v. Auf dem Weg vom Strahlteiler G nach S_1 beträgt die Lichtgeschwindigkeit c – v, auf dem Rückweg c + v.

Wenn man das Interferometer dreht, sollte bei irgend einer Stellung tatsächlich die obige Annahme erfüllt und GS_1 parallel zur Bewegungsrichtung der Erde durch den Äther sein.
Es gelang Michelson und seinem Kollegen Edward Morley im Jahre 1886 aber nicht auch nur den geringsten Laufzeitunterschied Δt zu messen. Durch andere Experimente konnte die Möglichkeit eindeutig ausgeschlossen werden, dass die Erde den Äther mit sich zieht und daher die Relativgeschwindigkeit an der Erdoberfläche v = 0 ist.
Hendrik Lorentz glaubt fest an die Existenz des Lichtmediums. Um die Theorie des Äthers zu retten, nimmt er einfach an, dass sich Gegenstände bei hoher Geschwindigkeiten durch die Wirkung des Ätherwindes mechanisch zusammenziehen. Durch diese Kontraktionshypothese kann er sämtliche Versuchsergebnisse erklären und rettet damit die Äthertheorie.
Es gibt aber einen weiteren Widerspruch: Lorentz hat mit seinem ruhenden Äther ein bevorzugtes Bezugssystem geschaffen, gegenüber dem sich alle anderen bewegen. Dies widerspricht aber dem Newtonschen Relativitätsprinzip.

16.4 Die spezielle Relativitätstheorie

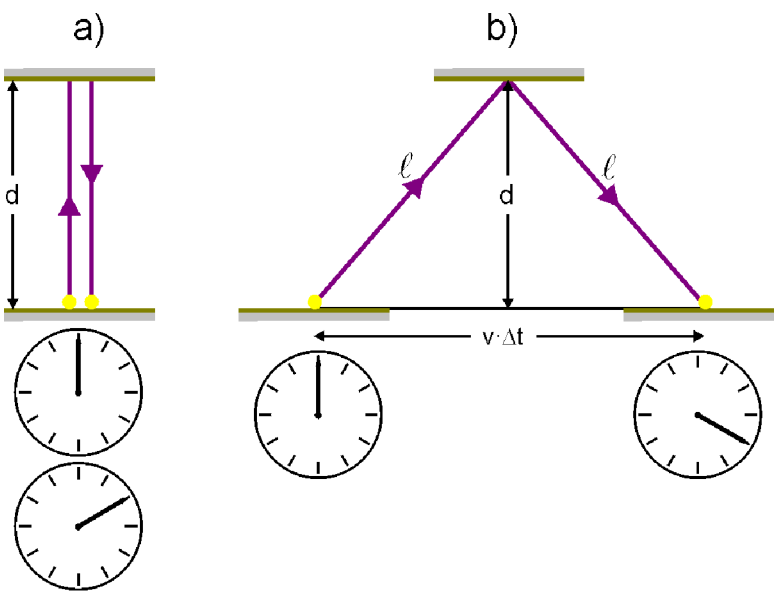
Sämtliche Diskrepanzen zwischen Theorie und Praxis lösen sich 1905. Albert Einstein kam aufgrund der Experimente seiner Kollegen zum Schluss, dass die Lichtgeschwindigkeit eine absolute Grösse sein musste. Damit warf er die Äthertheorie komplett über Bord. Ein Problem aber blieb: Wenn die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum konstant ist, so wäre das Newtonsche Relativitätsprinzip verletzt. Dieses sieht er aber als unabdingbar für die Physik. Einstein hadert lange mit diesen Widersprüchen. Schliesslich sieht er nur einen Ausweg. Er nimmt Zeit und Raum ihre Absolutheit. Kurz: Es gibt keinen Augenblick für die ganze Welt, der „Jetzt“ genannt werden könnte.

Einsteins Postulate, die die Welt veränderten, lauten

- Die Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum hat für jedes Inertialsystem denselben Wert[1].
- Die Naturgesetze nehmen in allen Inertialsystemen die gleiche Form an.

16.5 Die Zeitdilatation

Eine der Folgen dieser zwei Postulate lässt sich anhand einer “Lichtuhr“ zeigen. Eine Lichtuhr ist eine Vorrichtung, in der ein Photon ständig zwischen zwei Spiegeln hin- und herpendelt. Für einen Beobachter, der sich im Bezugssystem der Uhr befindet, sieht die Situation aus wie in der Abbildung a). Bewegt sich das Bezugssystem der Lichtuhr dagegen an einem ruhenden Beobachter mit der Geschwindigkeit v vorbei, so stellt sich die Sache dar wie in der Abbildung b) gezeigt.



Dies hat aber drastische Konsequenzen, wie wir gleich zeigen werden. Für den Beobachter im Bezugssystem der Uhr dauert der Zeitabschnitt für ein hin- und herpendeln $\Delta t_E = \frac{2d}{c}$. Für den ruhenden Beobachter, an dem die Lichtuhr vorbeifliegt, dauert

[1] Heute ist die Lichtgeschwindigkeit **definiert** zu 299’792’458.0 m/s.

der Zeitabschnitt $\Delta t = \frac{2l}{c} = \frac{2 \cdot \sqrt{d^2 + \left(\frac{1}{2} v \Delta t\right)^2}}{c}$. Kombinieren wir beide Gleichungen und lösen nach Δt auf, so erhalten wir

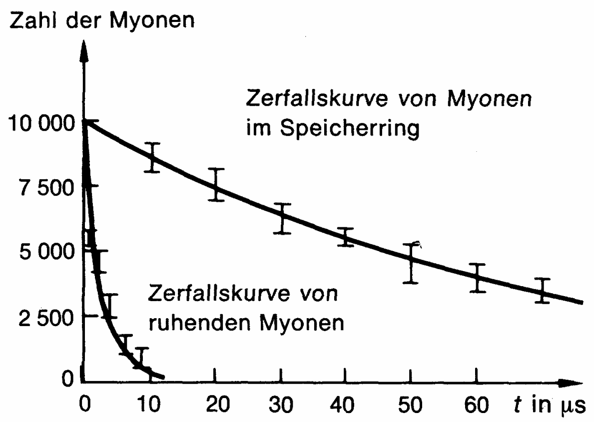
$$\Delta t = \frac{\Delta t_E}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ist die Lichtgeschwindigkeit in beiden Bezugssystemen gemäss den Einsteinschen Postulaten gleich gross, so unterscheiden sich die Zeitintervalle Δt_{ruhend} und Δt_{bewegt} um einen Faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Für die zwei Beobachten dauert also ein und dasselbe Ereignis unterschiedlich lange! Dies ist ein sensationelles Ergebnis – ist damit die Zeit doch ihrer Absolutheit beraubt worden!

Eine mit der Geschwindigkeit v bewegte Uhr geht um den Faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ langsamer als in ihrem Ruhesystem.

16.5.1 Beispiel (Der Myonen erster Teil)

Die Vorhersage der Zeitdilatation war das sensationellste Ergebnis der Relativitätstheorie. Die Messung der Zeitdilatation erwies sich aber zunächst als überaus schwierig und gelang erstmals im Jahre 1938 den beiden amerikanischen Physikern Ives und Stillwell.



Heute wird die Zeitdilatation in vielen Experimenten der "Elementarteilchenphysik" gemessen. Als Beispiel betrachten wir ein Experiment, welches 1959 im Europäischen Kernforschungszentrum CERN bei Genf durchgeführt wurde. Zur Messung der Zeitdilatation wurden dabei Myonen benützt. Diese Elementarteilchen gleichen in vielen Eigenschaften den Elektronen. Myonen sind jedoch instabil und zerfallen bereits wenige millionstel Sekunden nach ihrer Entstehung. Hat man z. B. zum Zeitpunkt t = 0 insgesamt 10 000 Myonen erzeugt, so findet man zur Zeit t = 1 µs nurmehr 6347 davon vor, nach 1,52 µs sogar nur noch 5000 Myonen, also die Hälfte. Man bezeichnet daher τ = 1,52 µs als die Halbwertszeit der Myonen. Der Zerfall genügt einem Exponentialgesetz, wie dies auch für den radioaktiven Zerfall mancher chemischer Elemente der Fall ist.

Im erwähnten CERN-Experiment beobachtete man den Zerfall von Myonen, die nicht ruhten, sondern in einem Speicherring mit der Geschwindigkeit v = 0.99942 c kreisten.

Wir können die kreisenden Myonen als bewegte Uhren ansehen. Wegen der Zeitdilatation ist ihr Zerfall verlangsamt, und die Halbwertszeit der kreisenden Myonen vergrössert sich daher auf den Wert

$$\tau(v) = \frac{\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1.52\ \mu s}{\sqrt{1-(0.99942)^2}} = 44.6\ \mu s$$

Die Messungen bestätigten diese Vorhersage der Relativitätstheorie, wobei der relative Messfehler 0,1 % betrug.
Heute kann die Zeitdilatation auch mit Atomuhren nachgewiesen werden, wobei die Geschwindigkeit von Flugzeugen ausreicht, um messbare Effekte hervorzurufen. Das erste derartige Experiment wurde im Jahre 1971 von den beiden amerikanischen Physikern Joseph Hafele und Richard Keating durchgeführt.

16.6 Längenkontraktion

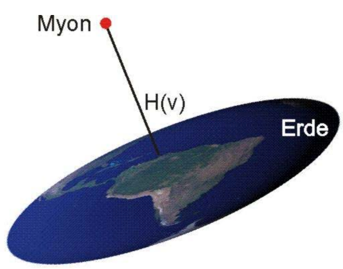
Eng mit dem Effekt der Zeitdilatation verknüpft ist der Effekt der Längenkontraktion. Die Länge eines Objekts, gemessen in seinem Ruhesystem, nennt man Ruhelänge l_0. Misst man nun die Länge eines bewegten Objekts in Bewegungsrichtung, so ist die gemessene Länge kürzer als die Ruhelänge des Objekts. Dies um den Faktor

$$l = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \cdot l_0 \, .$$

Die Länge ist also kleiner, wenn sie in einem Bezugssystem gemessen wird, in dem sich die Stange bewegt. Dieser Kontraktion sagt man auch **Lorentz-FitzGerald-Kontraktion**.

16.6.1 Beispiel (Der Myonen zweiter Teil)

Wir betrachten diese Situation nun vom Standpunkt eines Beobachters, der mit den Myonen zur 10 km entfernten Erdoberfläche fliegt. Für ihn ruhen die Myonen, und ihre Halbwertszeit beträgt daher - gemessen mit seinen Uhren - nur τ = 1,52 μs. Wieso kann die entgegenfliegende Erde dennoch die Myonen erreichen?



Vom Standpunkt des mit den Myonen mitfliegenden Beobachters ist die Entfernung H wesentlich kleiner als 10 km. Daher können die kurzlebigen Myonen diese Entfernung innerhalb ihrer Halbwertszeit τ = 1,52 μs leicht zurücklegen!

Die Längenkontraktion macht sich bei Experimenten mit Elementarteilchen deutlich bemerkbar. Das elektrische Feld eines fast mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Elektrons oder Protons wird durch die Lorentzkontraktion verformt. Die Feldlinien werden in der Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung zusammengedrängt, so dass dort besonders hohe elektrische Feldstärken entstehen. Dadurch übt das Feld des Teilchens stärkere Kräfte auf andere Teilchen aus. Deshalb hinterlassen Teilchen, die sich fast mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, besonders kräftige Spuren in Blasenkammern.

16.7 Die Geschwindigkeitstransformation

Wie transformieren sich nun die Geschwindigkeiten beim Übergang von einem Bezugssystem zum anderen? Dazu werden die Gleichungen der Lorentz - Transformation differenziert. Wir nehmen an dieser Stelle einfach das Resultat zur Kenntnis. Dazu betrachten wir ein Flugzeug, das mit der Geschwindigkeit v - bezüglich eines ruhenden Beobachters – in x- Richtung unterwegs ist. Plötzlich wird das Flugzeug von einem ebenfalls in x- Richtung fliegenden UFO überholt. Der überraschte Pilot im Flugzeug kann die Geschwindigkeit u’ des UFOs bestimmen. Der – nicht weniger verdutzte – Beobachter am Erdboden misst dann für die Geschwindigkeit der fliegenden Untertasse nicht etwa einfach $u = u' + v$ sondern

$$u = \frac{u' + v}{1 + \left(\frac{v \cdot u'}{c^2}\right)}.$$

Für langsame Bewegungen unterscheidet sich der Nenner nicht wesentlich von 1 und das Ergebnis entspricht dem klassischen Resultat!

16.7.1 Beispiel Flugzeug

Nehmen wir mal an, obiges UFO wäre gar keines sondern ein schnell fliegendes Kampfflugzeug – was erhebliche Zweifel am Geisteszustand des Piloten im Linienflugzeug aufkommen lassen würde. Der Linienpilot misst für den Kampfjet eine Geschwindigkeit von u’ = 400 m/s, während er selber mit v = 250 m/s unterwegs ist. Der ruhende Beobachter am Boden registriert für den Kampfjet eine Geschwindigkeit von

$$u = \frac{400\frac{m}{s} + 250\frac{m}{s}}{1 + \frac{250\frac{m}{s} \cdot 400\frac{m}{s}}{\left(3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\right)^2}} = \frac{650\frac{m}{s}}{1 + 1.1 \cdot 10^{-12}} \approx \underline{\underline{650\frac{m}{s}}},$$

was dem klassischen Resultat entspricht.

16.7.2 Beispiel UFO

Gehen wir zugunsten des Piloten davon aus, dass er tatsächlich ein UFO gesehen hat und dafür eine Geschwindigkeit von 0.8 c misst – wie er das trotz seiner Überraschung hinkriegt, und wie er das technisch macht, sei mal dahingestellt – und der Pilot einen Flieger mit dem neuen X – Speed Antrieb hat und selbst mit 0.5 c unterwegs ist, dann misst der Beobachter am Boden für die fliegende Untertasse eine Geschwindigkeit von

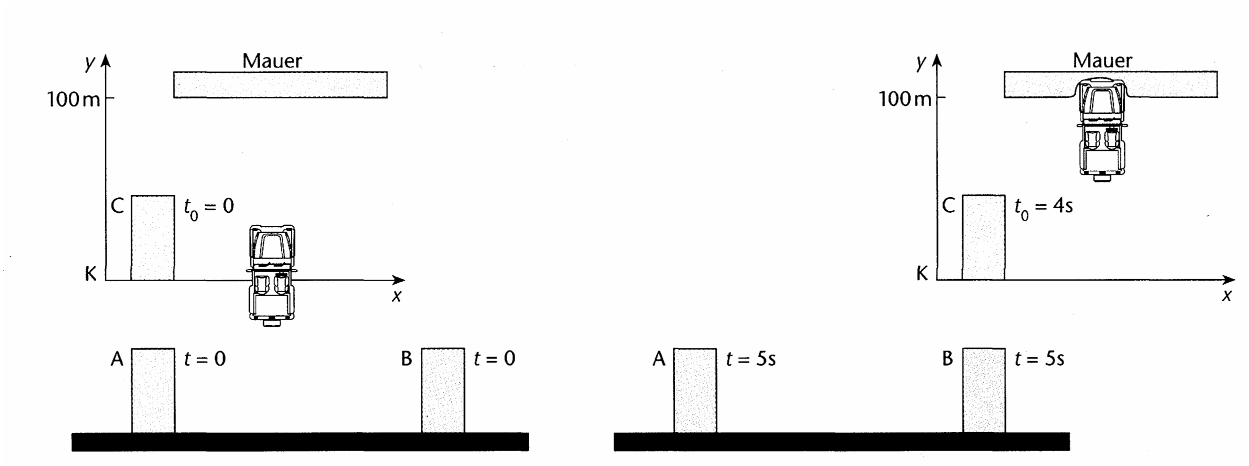
$$u=\frac{0.8\cdot 3\cdot 10^8\,\frac{m}{s}+0.5\cdot 3\cdot 10^8\,\frac{m}{s}}{1+\frac{0.5\cdot 3\cdot 10^8\,\frac{m}{s}\cdot 0.8\cdot 3\cdot 10^8\,\frac{m}{s}}{\left(3\cdot 10^8\,\frac{m}{s}\right)^2}}=\frac{1.3\cdot 3\cdot 10^8\,\frac{m}{s}}{1+0.4}\approx \underline{\underline{0.92\cdot 3\cdot 10^8\,\frac{m}{s}}}$$

und nicht 1.3 – fache Lichtgeschwindigkeit, wie nach dem klassischen Resultat zu erwarten wäre!

16.7.3 Relativistische Massenzunahme

Die bei hohen Geschwindigkeiten auftretende Zeitdilatation wirkt sich auch auf andere Grundgrössen der Mechanik aus. Ein erstes Beispiel ist die Masse, die ja ein Mass für die Trägheit eines Körpers ist.

Betrachten wir in einem Gedankenexperiment ein Auto der Masse m_0 = 1000 kg. Es durchfährt mit gleichförmiger Geschwindigkeit im Bezugssystem K eine 100 m lange Messstrecke in y – Richtung in 4 s. Somit hat es die Geschwindigkeit v_A = 25 m/s. Mit dieser Geschwindigkeit prallt das Auto frontal auf eine Mauer.



Quelle: unbekannt

Die Tiefe des in der Mauer entstehenden Lochs ist ein Mass für den Impuls p, den das Auto gehabt hat.

$$p=m_0\cdot v_A=1000\,kg\cdot 25\,m/s=25'000\,kgm/s$$

Stellen wir uns vor, wir seien ruhende Beobachter und das ganze Bezugssystem K mit Auto und Mauer rase in x- Richtung mit der Geschwindigkeit v = 0.6c an uns vorbei. Zwar ist die Messstrecke in y – Richtung auf für uns 100 m lang, wegen der Zeitdilatation wird sie aber für uns nicht in 4.0 s sondern in der Zeit

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{4.0\ s}{\sqrt{1-0.6^2}} = 5.0\ s$$

durchfahren.
Uns erscheint die Geschwindigkeit des Autos in y – Richtung aus auf v_A' = 20 m/s verringert.

Da das Loch in der Mauer auch für uns dieselbe Tiefe hat, ist der Impuls $p' = m \cdot v_A'$ aus unserer Sicht ebenso 25'000 kgm/s wie aus der Sicht eines in K ruhenden Beobachters.
Es bleibt nur eine Erklärung: Für uns hat das Auto statt der "Ruhemasse" m_0 = 1000 kg die Masse:

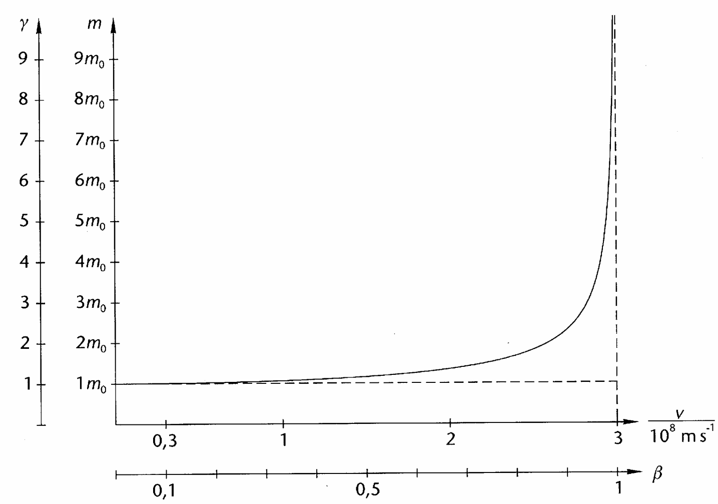
$$m' = \frac{p'}{v_A'} = \frac{25'000\ kgm/s}{20\ m/s} = 1250\ kg$$

Die Masse eines ruhenden Körpers ist seine *Ruhemasse m_0*.

Die Masse *m* eines mit der Geschwindigkeit $v = \beta \cdot c$ bewegten Körpers ist grösser als seine Ruhemasse:

$m = \gamma \cdot m_0$ **oder** $$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Masse:



Quelle: unbekannt

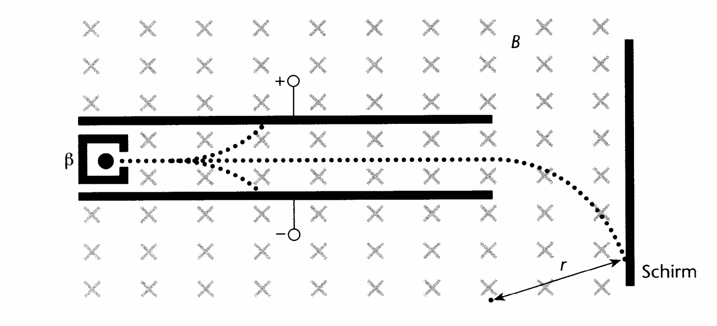
Die relativistische Massenzunahme beträgt dann:

$$\Delta m = m - m_0 = \gamma \cdot m_0 - m_0 = m_0(\gamma - 1)$$

Relativistische Effekte machen sich erst bemerkbar, wenn sich Körper schneller als mit 10% der Lichtgeschwindigkeit bewegen.

Die überraschende Aussage der Relativitätstheorie, dass die Masse eines Körpers von seiner Geschwindigkeit abhängt, wurde 1909 durch einen von BUCHERER durchgeführten Versuch für das Elektron bestätigt.

Ein radioaktiver β-Strahler sendet Elektronen aus. Sie haben alle möglichen Geschwindigkeiten im Bereich zwischen etwa 0,20c und 0,95c. Mit einem Geschwindigkeitsfilter lassen sich Elektronen jeder gewünschten Geschwindigkeit aussondern. Es besteht aus dem elektrischen Feld eines sehr eng gebauten Plattenkondensators und einem dazu senkrechten Magnetfeld.



Quelle: unbekannt

Ein Elektron hat die negative Elementarladung $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C . Im *elektrischen* Feld der Feldstärke E wird es mit der Kraft $F_e = e \cdot E$ nach oben zur positiv geladenen Platte abgelenkt. Im *magnetischen* Feld der Feldstärke B wird es, mit der Lorentzkraft $F_L = e \cdot v \cdot B$ nach unten abgelenkt.

Die Kraft des elektrischen Feldes hängt nicht von der Elektronengeschwindigkeit v ab, die des Magnetfelds hingegen ist zu ihr proportional. Nur für Elektronen einer einzigen Geschwindigkeit v kompensieren sich beide Kräfte:

$$F_L = F_e \quad \Rightarrow \quad evB = eE \quad \Rightarrow \quad v = \frac{E}{B}$$

Diese Elektronen bewegen sich im Geschwindigkeitsfilter geradeaus und danach, im Magnetfeld ausserhalb des Kondensators, auf einer Kreisbahn. Dort wirkt die Kraft F_L als Zentripetalkraft F_z:

$$F_z = F_L \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{r} = evB \quad \Rightarrow \quad m = \frac{eBr}{v}$$

BUCHERER variierte die elektrische Feldstärke E des Kondensators und damit die Geschwindigkeit v der untersuchten Elektronen. Durch Messungen der jeweiligen Kreisbahnradien r bestimmte er die zugehörige Elektronenmasse m und bestätigte, dass sie gegenüber der Ruhmasse $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-11}$ kg um den Faktor γ erhöht ist.

16.7.4 Äquivalenz von Masse und Energie

Die wohl wichtigste Erkenntnis der Relativitätstheorie lässt sich gewinnen, wenn man die Formel für die relativistische Masse

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

im Punkt $\beta = 0$ durch ihr Taylorpolynom[2] (Näherungsformel) ersetzt:

$$\Rightarrow \quad m \cong \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \ldots\right) \cdot m_0 \qquad \Rightarrow \quad m = m_0 + \frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^4} + \ldots$$

multipliziert man diese Gleichung mit c^2, so erhält man:

$$mc^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2}$$

Bei der Betrachtung dieses Terms fällt sofort der zweite Summand rechts vom Gleichheitszeichen auf; es ist die altbekannte kinetische Energie: $E_{kin} = \frac{1}{2} m_0 v^2$. Dann müssen aber alle Terme, welche hier summiert werden von der Dimension einer E-nergie sein!

EINSTEIN erkannte, dass mc^2 die Gesamtenergie eines Körpers der relativistischen Masse m ist, die sich aus den verschiedenen Summanden, der Ruheenergie m_0c^2 und der kinetischen Energie $\frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \ldots$ zusammensetzt. Der Korrekturterm der kinetischen Energie macht sich erst bei Geschwindigkeiten v > 0.1c bemerkbar.

Ein ruhender Körper mit der Ruhemasse m_0 hat die Ruheenergie $E_0 = m_0c^2$.
Die Gesamtenergie $E = mc^2$ eines sehr schnell bewegten Körpers besteht aus Ruheenergie und kinetischer Energie:
$E = E_0 + E_k$

Das merkwürdige ist aber doch, dass sich die Masse m und die Energie E nur um den konstanten Faktor c^2 unterscheiden. Eine Erhöhung der kinetischen Energie eines Körpers bewirkt eine Erhöhung der Gesamtenergie und so *gleichzeitig* eine Erhöhung der Masse!

---

[2] Ist f eine auf dem abgeschlossenen Intervall [a,b] $\to$ R n-mal stetig differenzierbare Funktion und existiert die Ableitung $f^{(n)}$, so lässt sich an jeder beliebigen Stelle $x_0 \in$ [a,b] die Funktion f durch ihr Taylorpolynom approximieren: $f(x) \cong f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.
Mit dem TI-89 lässt sich das Taylorpolynom einfach berechnen: Eingabe: **taylor(Term1, Var, Grad[,Punkt])**, dabei ist Term1 die zu entwickelnde Funktion, Var die Funktionsvariable, Grad = n und [,Punkt] ist die optionale Eingabe des Entwicklungspunktes, falls dieser von 0 abweicht.

In diesem Sinne sind Masse und Energie zwei gleichwertige Aspekte ein und derselben Sache. Man bezeichnet dies als **Äquivalenz von Masse und Energie**.

Für die kinetische Energie gilt:

Die kinetische Energie E_k eines mit der Geschwindigkeit $v = \beta \cdot c$ bewegten Körpers ist:

$$\boldsymbol{E_k = (\gamma - 1) \cdot E_0}$$

Dabei ist $E_0 = m_0 c^2$ die Ruheenergie des Körpers und $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

16.8 Gedanken zur allgemeinen Relativitätstheorie

16.8.1 Einsteinsche Äquivalenzprinzip

Bei der speziellen Relativitätstheorie (SRT) sind stets gegeneinander unbeschleunigte Bezugssysteme betrachtet worden. Jeder Beobachter, unabhängig in welchem Bezugssystem er sich befindet, kann keine Aussage darüber machen, ob sich sein Bezugssystem bewegt oder das beobachtete. Damit klammert man aber stillschweigend die Gravitationskräfte aus. 1915 erweiterte Albert Einstein seine SRT, durch zulassen von beschleunigten Bezugssystemen (damit wurden Gravitationskräfte automatisch eingeschlossen), zur allgemeinen Relativitätstheorie (ART).
Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie bildet das Äquivalenzprinzip:

Ein *homogenes* Gravitationsfeld ist zu einem gleichförmig beschleunigten Bezugssystem völlig äquivalent!

Ob eine Rakete auf dem der Erde Boden steht oder im Weltraum mit 9.81 m/s^2 durch die Triebwerke beschleunigt wird – spielt für den Astronauten keine Rolle. Hat er keine Fenster und sind die Triebwerke vom neuesten Typ “Flüsterleise“, so kann er die beiden Situationen durch physikalische Experimente nicht unterscheiden. Beide Bezugssysteme sind für ihn gleichwertig.

16.8.1.1 Auswirkungen

Nehmen wir eine kleine Probemasse m_1 an, welche im Gravitationsfeld der grossen Masse M frei falle. Am Anfangspunkt der Bewegung von m_1, im Unendlichen ($r = \infty$), besitze sie die Geschwindigkeit $v_\infty = 0$. Mit dem Gravitationsgesetz folgt für ihre Geschwindigkeit in der Entfernung r von M:

Die Messzeit soll nun so kurz sein, dass v im betrachteten Zeitabschnitt konstant ist. Der ruhende Beobachter bei $r=\infty$ misst dann für einen gewissen Streckenabschnitt das Zeitintervall Δt. Der auf m_1 reitende Beobachter hingegen misst aufgrund der Zeitdilatation das verkürzte Zeitintervall $\Delta t' = \dfrac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Zusammen mit obiger Formel für die Geschwindigkeit erhalten wir damit

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{2\varphi}{c^2}}}, \text{ mit } \varphi = \frac{G \cdot M}{r}.$$

Für praktische Probleme kann der Nenner angenähert werden:

Schlussfolgerung:

Offensichtlich gehen Uhren in einem Gravitationsfeld umso langsamer, je grösser das Gravitationspotential ist.

Oder anders: Leute auf einem hohen Berg altern schneller als die Leute im Tal.

16.8.2 Effekte

16.8.2.1 Gravitationsrotverschiebung

Atome können angeregt werden. Relaxieren sie in ihren Grundzustand, so können sie die überschüssige Energie in Form von Strahlung ganz bestimmter Frequenz abgeben. Die Frequenz ist gegeben durch $f = \frac{1}{T}$. Bewegt sich das Atom während des

Relxationsprozesses, dann misst ein ruhender Beobachter die Frequenz $f = \frac{1}{1+\frac{\varphi}{c^2}}$.

Die gemessene Frequenz wird also kleiner als im Ruhesystem des Atoms. Man spricht von einer **Gravitationsrotverschiebung**.

16.8.2.2 Schwarze Löcher

In der Formel $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{2\varphi}{c^2}}}$ tritt genau dann ein Problem auf, wenn $\varphi = \frac{c^2}{2}$ ist. In diesem Fall würde der Nenner null und $\Delta t' = \infty$. Diesem Wert des Gravitationspotentials entspricht der Radius

$$r = \frac{2GM}{c^2}.$$

Dieser Radius wird **Schwarzschild – Radius** genannt.

Was hat es mit diesem Radius auf sich? Ist ein Objekt aufgrund seiner Dichte kleiner als sein Schwarzschildradius (wie man es sich bei Neutronensternen vorstellen könnte), so bedeutet dies, dass nichts(!) von diesem Objekt entkommen kann, wenn es näher als der Schwarzschildradius an diesem Objekt dran ist. Licht kann vom Ort $r < r_{Schwarzschild}$ einen Beobachter am Ort $r > r_{Schwarzschild}$ niemals erreichen. Man bezeichnet deshalb den Bereich $r < r_{Schwarzschild}$ auch als **schwarzes Loch**.

16.8.2.3 Gravitationslinsen

Der Effekt der Zeitdehnung innerhalb eines Gravitationsfeldes hat noch eine andere Auswirkung. Weil die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum konstant ist, muss sich der Raum in einem Gravitationsfeld dehnen. Eine Masse beult also quasi das Raum-Zeit Gitter aus. Diese Ausbeulung ist umso grösser, je grösser die Masse ist. Deswegen verläuft ein Lichtstrahl im Bereich einer grossen Masse nicht geradlinig, sondern wird von der Masse abgelenkt. Massen krümmen also den Lichtstrahl (**Gravitationslinseneffekt**).

Quelle: antwrp.gfsc.nasa.gov

16.9 Aufgaben

1) Ein 30-jähriger Weltraumfahrer startet im Jahre 2004 zu einer Reise durch das Weltall. Seine durchschnittliche Reisegeschwindigkeit beträgt relativ zur Erde gemessen $v = \frac{40}{41}c$. Wie alt ist der Weltraumfahrer, wenn er im Jahre 2035 zurückkehrt?

2) Zwei synchronisierte Uhren A und B haben auf der Erde einen Abstand von 600 km. Eine Rakete fliegt mit der Geschwindigkeit $v = \frac{12}{13}c$ über die Erde hinweg und kommt erst bei Uhr A, dann bei Uhr B vorbei. Bei A zeigt eine Uhr in der Rakete die gleiche Zeit wie Uhr A an. Welche Zeit zeigt die Raketenuhr im Vergleich zur Uhr B an, wenn sie über diese hinwegfliegt?

3) Im Jahre 1995 startet ein 20-jähriger Astronaut zu einer Weltraumreise. Da seine Rakete mit $v = \frac{60}{61}c$ fliegt und damit fast Lichtgeschwindigkeit erreicht, kann er während seiner 33 Jahre dauernden Reise auch den 9.7 Lichtjahre entfernten Sirius besuchen.
   a) Welches Jahr schreibt man auf der Erde, wenn der Astronaut als 53-jähriger zurückkehrt?
   b) Wie alt ist der Astronaut, wenn er auf seinem direkten Flug zu Sirius diesen Stern passiert?
   c) Wie schnell hätte der Astronaut fliegen müssen, um während seiner 33 Jahre dauernden Reise auch den 2 Millionen Lichtjahre entfernten Andromedanebel besuchen zu können?

4) Wie gross wäre die Halbwertszeit der Myonen, wenn sie mit derselben Geschwindigkeit v = 0.999 999 997 c im Ring kreisen würden wie Elektronen im Deutschen Elektronensynchrotron (DESY) in Hamburg?

5) Angenommen, die Myonen (v = 0.9994c) hätten eine Lebenserwartung von 70 Jahren. Wie lange lebten sie dann im Speicherring?

6) Wie schnell muss ein Elektron in einem Beschleuniger sein, dass dessen Länge für das Elektron auf ein Viertel kontrahiert erscheint?

7) Ein Raumschiff fliegt mit v = 0.6 c über eine synchronisierte Uhrenkette hinweg. Anfang und Ende des Raumschiffes befinden sich gleichzeitig über zwei Uhren, die einen Abstand von 48 m haben. Wie lang ist das Raumschiff für einen Astronauten, der sich im Raumschiff aufhält? Wie erklärt er sein anderslautendes Ergebnis?

8) Wie gross ist die Massenzunahme eines Satelliten mit 1000 kg Masse, der auf seiner Erdumlaufbahn eine Geschwindigkeit von 28'000 km/h hat?

9) Im deutschen Elektronensynchrotron DESY werden Elektronen auf eine Geschwindigkeit von v = 0.999 999 997 c beschleunigt. Um welchen Faktor ist die dynamische Masse dann grösser als die Ruhemasse?

16.10 Lösungen

1) Für den Weltraumfahrer vergehen $\Delta t = (2035-2004)a\sqrt{1-\left(\frac{40}{41}\right)^2} = 31a \cdot \frac{9}{41} \approx \underline{\underline{6.8\,a}}$.
Er kommt also als Siebenunddreissigjähriger im Jahre 2035 zurück.

2) Während des Fluges der Rakete von Uhr A zur Uhr B vergeht auf der Erde die Zeit $\Delta tR = \frac{\Delta s}{\frac{12}{13}c} = \frac{13 \cdot 600\,km}{12 \cdot 300000\,\frac{km}{s}} = 2\frac{1}{6}ms$. Währenddessen vergeht in der Rakete nur die Zeit $\Delta t = \Delta t_R \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{13}{6}ms \cdot \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{6}ms$. Die Uhr in der Rakete zeigt daher $\frac{13}{6}ms - \frac{5}{6}ms = 1\frac{1}{3}ms$ weniger an als die Uhr B, wenn sie über diese hinwegfliegt.

3) a) Auf der Erde sind 183 Jahre vergangen; man schreibt das Jahr 2178: $\Delta t_R = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{33\,a}{\sqrt{1-\left(\frac{60}{61}\right)^2}} = \underline{\underline{183\,a}}$

b) In Erdzeit vergehen für die Reise zum Sirius $\Delta t_R = \frac{9.7\,Lj}{\frac{60}{61}c} = 9.86\,a$. Für den Astronauten vergehen jedoch nur $\Delta t = 9.86\,a \cdot \sqrt{1-\left(\frac{60}{61}\right)^2} = 1.78\,a$. Er kommt als Einundzwanzigjähriger am Sirius vorbei.

c) Aus $\Delta t = \Delta t_R \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ folgt mit $\Delta t_R = 33a$ und $\Delta t_R = \frac{2 \cdot d}{v}$ (d = 2 Mio Lj = $2 \cdot 10^6$ ca) $\frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{33}{4 \cdot 10^6}\right)^2}} = 1 - 34 \cdot 10^{-12}$. Die Geschwindigkeit des Raumschiffes müsste sich also auf 34 Billionstel von c nähern.

4) Die Halbwertszeit wäre $\Delta t_R = \frac{1.52\,\mu s}{\sqrt{1-0.999999997^2}} = \underline{\underline{19.6\,ms}}$

5) $\frac{70a}{\sqrt{1-0.9994^2}} = 2021a$

6) Aus $l_K = \frac{l}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ folgt $\frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{l_K}{l}\right)^2} = 0.968$

7) Die Eigenlänge der Rakete beträgt l_R = 60 m: $l_R = \frac{48m}{\sqrt{1-0.6^2}} = 60\,m$. Für den Astronauten ist die Uhrenkette nicht synchronisiert. In Flugrichtung gesehen geht jede nachfolgende Uhr um eine bestimmte Zeitspanne gegenüber der davor stehenden Uhr vor! Anfang und Ende des Raumschiffs werden daher für den Astronauten nicht gleichzeitig markiert, sondern der Anfang zu früh, das Ende zu spät. Die Länge wird zu klein gemessen.

8) Da hier $v << c$ ist, benutzen wir die Näherung $\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$. Aus $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \approx m_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}(v^2/c^2)\right)$ folgt $\Delta m = 3.4 \cdot 10^{-7}\ kg$.

9) Die dynamische Masse der Elektronen ist nahezu 13000-mal grösser als ihre Ruhemasse: $\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 12910$.

16.11 Anhang

16.11.1 Einsteins Originalpublikation aus dem Jahre 1905 zur Relativitätstheorie (Annalen der Physik)

13. *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?*
von A. Einstein.

Die Resultate einer jüngst in diesen Annalen von mir publizierten elektrodynamischen Untersuchung[1]) führen zu einer sehr interessanten Folgerung, die hier abgeleitet werden soll.

Ich legte dort die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum nebst dem Maxwellschen Ausdruck für die elektromagnetische Energie des Raumes zugrunde und außerdem das Prinzip:

Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Parallel-Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden (Relativitätsprinzip).

Gestützt auf diese Grundlagen[2]) leitete ich unter anderem das nachfolgende Resultat ab (l. c. § 8):

Ein System von ebenen Lichtwellen besitze, auf das Koordinatensystem (x, y, z) bezogen, die Energie l; die Strahlrichtung (Wellennormale) bilde den Winkel φ mit der x-Achse des Systems. Führt man ein neues, gegen das System (x, y, z) in gleichförmiger Paralleltranslation begriffenes Koordinatensystem (ξ, η, ζ) ein, dessen Ursprung sich mit der Geschwindigkeit v längs der x-Achse bewegt, so besitzt die genannte Lichtmenge — im System (ξ, η, ζ) gemessen — die Energie:

$$l^* = l \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

wobei V die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Von diesem Resultat machen wir im folgenden Gebrauch.

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 891. 1905.

2) Das dort benutzte Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist natürlich in den Maxwellschen Gleichungen enthalten.

42*

Es befinde sich nun im System (x, y, z) ein ruhender Körper, dessen Energie — auf das System (x, y, z) bezogen — E_0 sei. Relativ zu dem wie oben mit der Geschwindigkeit v bewegten System (ξ, η, ζ) sei die Energie des Körpers H_0.

Dieser Körper sende in einer mit der x-Achse den Winkel φ bildenden Richtung ebene Lichtwellen von der Energie $L/2$ (relativ zu (x, y, z) gemessen) und gleichzeitig eine gleich große Lichtmenge nach der entgegengesetzten Richtung. Hierbei bleibt der Körper in Ruhe in bezug auf das System (x, y, z). Für diesen Vorgang muß das Energieprinzip gelten und zwar (nach dem Prinzip der Relativität) in bezug auf beide Koordinatensysteme. Nennen wir E_1 bez. H_1 die Energie des Körpers nach der Lichtaussendung relativ zum System (x, y, z) bez. (ξ, η, ζ) gemessen, so erhalten wir mit Benutzung der oben angegebenen Relation:

$$E_0 = E_1 + \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right],$$

$$H_0 = H_1 + \left[\frac{L}{2}\,\frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} + \frac{L}{2}\,\frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}\right]$$

$$= H_1 + \frac{L}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Durch Subtraktion erhält man aus diesen Gleichungen:

$$(H_0 - E_0) - (H_1 - E_1) = L\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1\right\}.$$

Die beiden in diesem Ausdruck auftretenden Differenzen von der Form $H - E$ haben einfache physikalische Bedeutungen. H und E sind Energiewerte desselben Körpers, bezogen auf zwei relativ zueinander bewegte Koordinatensysteme, wobei der Körper in dem einen System (System (x, y, z)) ruht. Es ist also klar, daß die Differenz $H - E$ sich von der kinetischen Energie K des Körpers in bezug auf das andere System (System (ξ, η, ζ)) nur durch eine additive Konstante C unterscheiden kann, welche von der Wahl der willkürlichen additiven Konstanten der Energien H und E abhängt. Wir können also setzen:

$$H_0 - E_0 = K_0 + C,$$
$$H_1 - E_1 = K_1 + C,$$

da C sich während der Lichtaussendung nicht ändert. Wir erhalten also:

$$K_0 - K_1 = L \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

Die kinetische Energie des Körpers in bezug auf (ξ, η, ζ) nimmt infolge der Lichtaussendung ab, und zwar um einen von den Qualitäten des Körpers unabhängigen Betrag. Die Differenz $K_0 - K_1$ hängt ferner von der Geschwindigkeit ebenso ab wie die kinetische Energie des Elektrons (l. c. § 10).

Unter Vernachlässigung von Größen vierter und höherer Ordnung können wir setzen:

$$K_0 - K_1 = \frac{L}{V^2} \frac{v^2}{2}.$$

Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar:

Gibt ein Körper die Energie L in Form von Strahlung ab, so verkleinert sich seine Masse um L/V^2. Hierbei ist es offenbar unwesentlich, daß die dem Körper entzogene Energie gerade in Energie der Strahlung übergeht, so daß wir zu der allgemeineren Folgerung geführt werden:

Die Masse eines Körpers ist ein Maß für dessen Energieinhalt; ändert sich die Energie um L, so ändert sich die Masse in demselben Sinne um $L/9 . 10^{20}$, wenn die Energie in Erg und die Masse in Grammen gemessen wird.

Es ist nicht ausgeschlossen, daß bei Körpern, deren Energieinhalt in hohem Maße veränderlich ist (z. B. bei den Radiumsalzen), eine Prüfung der Theorie gelingen wird.

Wenn die Theorie den Tatsachen entspricht, so überträgt die Strahlung Trägheit zwischen den emittierenden und absorbierenden Körpern.

Bern, September 1905.

(Eingegangen 27. September 1905.)