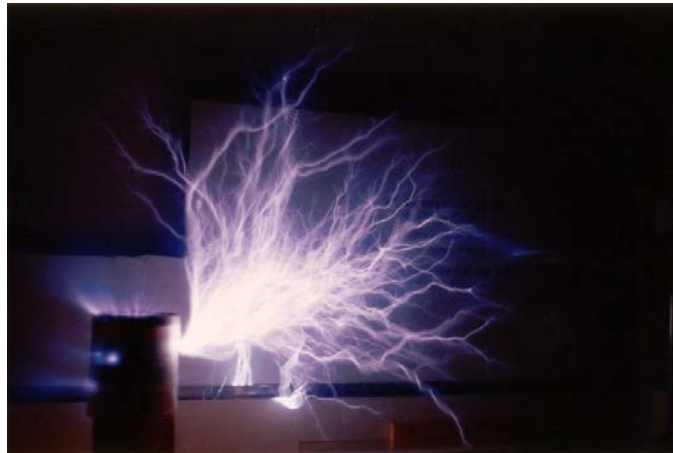


## 13 Elektrodynamik II – von Kapazitäten ,Induktivitäten und Wechselstromkreise

In diesem Kapitel werden wir Funken sprühen, genauso wie der Abgebildete Tesla – Transformator. Warum diese Koronaentladungen ungefährlich sind, das erfahren Sie in diesem Kapitel.



Quelle: Wikipedia

## 13.1 Die Kirchhoffschen Gesetze – Eine Repetition

Im Abschnitt 11.4 haben wir die zwei Kirchhoffschen Gesetze kennen gelernt, die 1845 vom deutschen Physiker Robert Gustav Kirchhoff formuliert wurden. An dieser Stelle sollen seine beiden Gesetze nochmals repetiert werden, da sie für das Verständnis der folgenden Abschnitte wichtig sind.



Gustav Robert Kirchhoff (1824 - 1887)  
Quelle: Wikipedia



- 1. Kirchhoffsches Gesetz - Knotenregel:** An jedem Verzweigungspunkt eines Stromkreises ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der wegfließenden Ströme oder mathematisch formuliert  $\sum_j I_j^{zu} = \sum_k I_k^{ab}$ .

Die Knotenregel ist eine Folge der Ladungserhaltung.



- 2. Kirchhoffsches Gesetz - Maschenregel:** Die Summe aller vorzeichenbehafteten Spannungen in einer Masche ist null:  $\sum_k U_k = 0$ .

Die beiden Gesetze bilden die Grundvoraussetzung zur Berechnung von Strömen und Spannungen in Stromkreisen bei zeitlich stationären Strömen. Anhand verschiedener Beispiele soll der Gebrauch der Kirchhoffschen Gesetze hier nochmals gezeigt werden.

*Beispiel:* In der in Abbildung 1 dargestellten Schaltung sind zwei Batterien  $U_{s,1} = 7V$  und  $U_{s,2} = 3V$  mit den Innenwiderständen  $R_1 = 2\Omega$  und  $R_2 = 1\Omega$  über einen Widerstand  $R_3 = 5\Omega$  miteinander verbunden. Der Punkt f ist geerdet und befindet sich deshalb auf dem Potential 0V. Berechnen Sie den Strom und die über den Widerständen abfallenden Spannungen, ausserdem alle in den Widerständen umgesetzte Leistung. Was passiert mit der 3V Batterie?

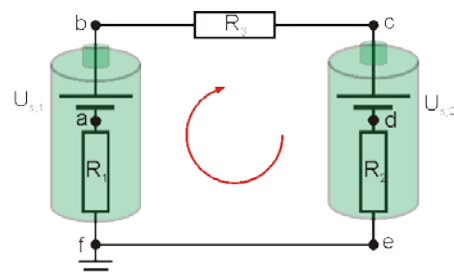


Abbildung 1 Kombinierte Schaltung

*Lösung*

Kirchhoff 1:

Es handelt sich um eine unverzweigte Anordnung, also fließt durch jedes Bauteil derselbe Strom  $I$ . Wir legen die Umlaufrichtung *willkürlich* im Uhrzeigersinn fest.

Kirchhoff 2:

Über jedem Widerstand fällt in Stromrichtung die Spannung  $U = R \cdot I$  ab. Beginnen wir mit unserem "Gang" durch die Masche beim Punkt a

$$U_{s,1} - I \cdot R_3 - U_{s,2} - I \cdot R_2 - I \cdot R_1 = 0.$$

Grafisch lässt sich obige Gleichung durch die Potentiale darstellen, wie dies in Abbildung 2 gemacht wurde. Wir lösen nach dem Strom auf und erhalten

$$I = \frac{U_{s,1} - U_{s,2}}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{4V}{8\Omega} = \underline{\underline{\frac{1}{2}A}}$$

Die von uns ursprünglich festgelegte Stromrichtung ist richtig gewesen. An den drei Widerständen wird jeweils die Leistung  $P = U \cdot I = R \cdot I^2$  umgesetzt.

Der Innenwiderstand der Batterie 1 setzt damit eine Leistung von  $P_1 = 2\Omega \cdot \left(\frac{1}{2}A\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}W}}$

, der in Batterie 2 eine Leistung von  $P_2 = 1\Omega \cdot \left(\frac{1}{2}A\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4}W}}$  und der Widerstand  $R_3$  eine

Leistung von  $P_3 = 5\Omega \cdot \left(\frac{1}{2}A\right)^2 = \underline{\underline{\frac{5}{4}W}}$  um.

Da die 3V Batterie entgegen der Stromrichtung in den Stromkreis geschaltet ist, wird sie aufgeladen. Dies ist natürlich nur möglich, falls die Batterie aufladbar ist!

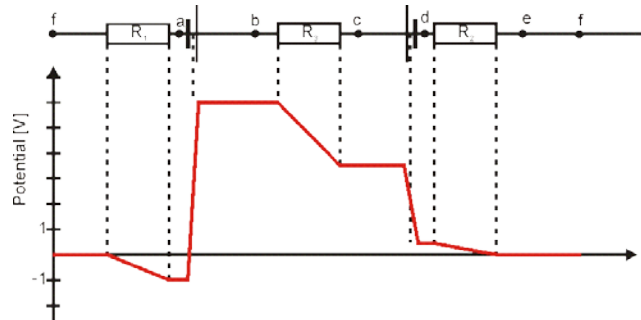


Abbildung 2 Potentialverlauf

*Beispiel:* Es kommt vor, dass sich eine Autobatterie bei längerem Stillstand des Fahrzeugs entlädt und sich darum das Auto nicht mehr starten lässt. In diesem Fall kann man dann mit Hilfe eines anderen Fahrzeugs Starthilfe leisten, indem man die Batterien der beiden Fahrzeuge miteinander koppelt. Dabei habe die gute Batterie eine Quellenspannung von 12V und die schlechte Batterie eine von 11V. Die Innenwiderstände der beiden Batterien seien beide  $0.01\Omega$ . Die beiden Starterkabel haben jeweils einen Widerstand von  $1.17 \cdot 10^{-2}\Omega$ . Wie gross ist die Stromstärke bei richtiger Verkabelung und wie gross bei falscher Verkabelung?

*Lösung:*

Die richtige Verkabelungsweise ist in Abbildung 3 a) dargestellt. Im gesamten Stromkreis wird derselbe Strom fließen. Die Anwendung der Maschenregel liefert

$$U_{s,1} - I \cdot R_3 - U_{s,2} - I \cdot R_2 - I \cdot R_4 - I \cdot R_1 = 0.$$

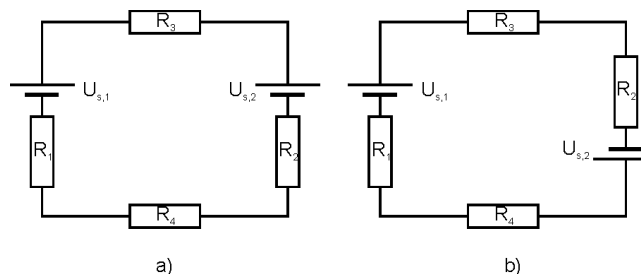


Abbildung 3 Richtige Schaltung zur Überbrückung zweier Autobatterien a) und falsche Schaltung b).

Aufgelöst nach dem Strom bekommt man

$$I = \frac{U_{s,1} - U_{s,2}}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{12V - 11V}{0.0434\Omega} = \underline{\underline{23A}}$$

Verbindet man die Batterien falsch, wie in Abbildung 3 b) dargestellt ist, so lautet die Maschenregel

$$U_{s,1} - I \cdot R_3 + U_{s,2} - I \cdot R_2 - I \cdot R_4 - I \cdot R_1 = 0$$

und der dazugehörige Strom beträgt

$$I = \frac{U_{s,1} + U_{s,2}}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{12V + 11V}{0.0434\Omega} = \underline{\underline{530A}}.$$

Durch einen solch hohen Strom würde in jedem Innenwiderstand eine Leistung von  $P_2 = 0.01\Omega \cdot (530A)^2 = \underline{\underline{2809W}}$  umgesetzt und in Form von Joulescher Wärme abgegeben. Dadurch würde die Schwefelsäure in den Batterien wahrscheinlich in kürzester Zeit zu kochen beginnen und die Batterien explodieren!

*Beispiel:* In der nebenstehenden Abbildung ist ein Netzwerk dargestellt, welches aus drei elektrischen Widerständen ( $R_1 - R_3$ ) und zwei Spannungsquellen ( $U_{s,1}$  und  $U_{s,2}$ ) zusammengesetzt ist (s steht dabei für source).

Die Aufgabe besteht nun darin, die (Teil-) Ströme  $I_1$  bis  $I_3$  und die (Teil-)Spannungen  $U_1$  bis  $U_3$  zu berechnen, wenn die Widerstandswerte  $R_1$  bis  $R_3$  und die Spannungswerte  $U_{s,1}$  respektive  $U_{s,2}$  bekannt sind.

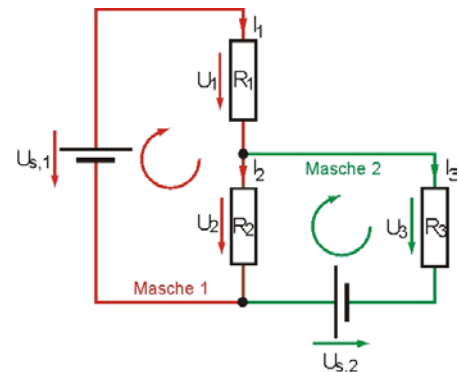


Abbildung 4 Verzweiger Stromkreis

*Lösung:*

Wir "setzen" uns mal auf den Knoten zwischen  $R_1$  und  $R_2$  und benutzen die **Knotenregel**:  $I_1$  fließt auf diesen Knoten zu, bekommt also ein positives Vorzeichen. Die Ströme  $I_2$  und  $I_3$  fließen von diesem Knoten weg und bekommen daher ein negatives Vorzeichen:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

Nun folgt die **Maschenregel**. Für die Masche 1 ergibt sich

$$U_1 + U_2 - U_{s,1} = 0 \text{ oder } I_1 R_1 + I_2 R_2 - U_{s,1} = 0$$

und für die Masche 2

$$-U_2 + U_3 - U_{s,2} = 0 \text{ oder } I_3 R_3 - I_2 R_2 - U_{s,2} = 0$$

Damit stehen drei Gleichungen für die Berechnung der drei Ströme zur Verfügung. Als Gleichungssystem dargestellt sieht das dann so aus:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 R_1 + I_2 R_2 = U_{s,1} \\ I_3 R_3 - I_2 R_2 = U_{s,2} \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem kann man nun einfach von Hand oder mit dem Taschenrechner lösen.

## 13.2 RC – Kreise – Kapazitäten im Gleichstromkreis

Der Kondensator als Ladungsspeicher wurde im Kapitel 10 bereits behandelt. Im Folgenden interessieren wir uns für den Lade- beziehungsweise den Entladevorgang am Kondensator. Der Stromverlauf am Kondensator wird in beiden Situationen eine Funktion der Zeit sein. Um diese zu berechnen, greifen wir wieder auf die Kirchhoffschen Gesetze zurück.

### 13.2.1 Das Entladen eines Kondensators

Für die folgende Betrachtung sei der Kondensator bereits aufgeladen und von der Batterie getrennt worden. Das vereinfachte Schaltschema sieht darum so aus, wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt ist.

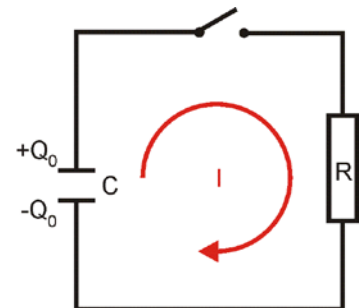


Abbildung 5 RC – Kreis mit geladenem Kondensator.

Wir gehen schrittweise vor:

- 1) der Schalter ist offen. Dann ist  $U_0 = \frac{Q_0}{C}$ .
- 2) der Schalter wird zum Zeitpunkt  $t = 0$  geschlossen. Es fließt somit kurzzeitig ein Anfangsstrom  $I_0$ , mit der Stärke  $I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{Q_0}{RC}$ .
- 3) Von jetzt an nimmt die Ladung auf dem Kondensator kontinuierlich ab.

$$i = -\frac{dQ}{dt} \tag{13.1}$$

- 4) Nun kommt die Maschenregel in Richtung des Stromes zum Zuge

$$\frac{Q}{C} - iR = 0 \tag{13.2}$$

- 5) Wir kombinieren (13.1) und (13.2). Das Resultat lautet

$$\begin{aligned} \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} &= 0 \\ \frac{dQ}{dt} &= -\frac{1}{RC} Q \end{aligned} \quad (13.3)$$

Wir suchen eine Funktion für die Ladung als Funktion der Zeit,  $Q(t)$ . Wir müssen also obige Gleichung nach  $Q$  auflösen.

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= -\frac{1}{RC} Q \quad \left| \cdot \frac{dt}{Q} \right. \\ \frac{dQ}{Q} &= -\frac{dt}{RC} \quad \left| \int \right. \\ \int \frac{dQ}{Q} &= -\int \frac{dt}{RC} \end{aligned}$$

Dies ist nun nichts anderes als die Frage, welche Funktion nach  $Q$  abgeleitet  $1/Q$  gibt (linke Seite) respektive nach  $t$  abgeleitet  $1$  gibt (rechte Seite)? Die Lösungen lauten

$$\frac{d(\ln|Q|)}{dQ} = \frac{1}{Q} \quad \text{und} \quad \frac{d(t)}{dt} = 1$$

Also lässt sich die letzte Gleichung schreiben zu

$$\begin{aligned} \int \frac{dQ}{Q} &= -\int \frac{dt}{RC} \\ \ln Q &= -\frac{t}{RC} + A \end{aligned}$$

$A$  ist dabei eine Integrationskonstante, deren Wert durch die jeweiligen Anfangsbedingungen festgelegt wird. Nun brauchen wir nur noch den letzten Schritt zu machen, um  $Q(t)$  zu erhalten:

$$\begin{aligned} \ln Q &= -\frac{t}{RC} + A \quad \left| e^x \right. \\ Q &= e^{-\frac{t}{RC} + A} \\ \Rightarrow Q &= e^{-\frac{t}{RC}} \cdot e^A \\ \underline{\underline{Q}} &= \underline{\underline{Q_0}} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

$e^A = Q_0$  ergibt sich aus der Anfangsbedingung, dass  $Q = Q_0$  bei  $t = 0$  ist. Dadurch ist  $Q_0 = e^A e^0 = e^A$ . Das Produkt  $RC$  wird **Zeitkonstante** genannt und ist *charakteristisch* für einen  $RC$  Kreis. Man schreibt  $\tau = RC$ . Wir haben also folgendes Ergebnis für die Ladung als Funktion der Zeit erhalten:

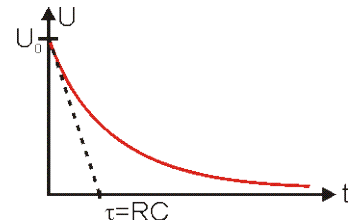
$$\underline{\underline{Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}} \quad (13.4)$$

Für den Strom als Funktion der Zeit folgt

$$i = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d\left(Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}\right)}{dt} = \frac{Q_0}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{Q_0}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \underline{\underline{i_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}} \quad (13.5)$$

Und für die Spannung als Funktion der Zeit erhält man mit  $u = Ri$  und  $u_0 = i_0 R$

$$\underline{\underline{u = u_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}} \quad (13.6)$$



**Abbildung 6** Entladekurve eines Kondensators.

In Abbildung 6 ist die Entladekurve eines Kondensators dargestellt. Nach der Zeit  $t$  ist die Spannung auf das  $\frac{1}{e}$  fache der Anfangsspannung abgefallen.

### 13.2.2 Der Ladevorgang am Kondensator

Nun wollen wir den Ladevorgang am Kondensator untersuchen. In Abbildung 7 ist eine Schaltung zum Aufladen eines Kondensators dargestellt. Ein ungeladener Kondensator wird mit einer Spannungsquelle und einem Widerstand über einen geöffneten Schalter verbunden. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird der Schalter geschlossen und ein Strom beginnt zu fließen. Der Strom wird in Abbildung 7 b) im Uhrzeigersinn fließen. Mit der Maschenregel erhalten wir

$$U - U_R - U_C = 0.$$

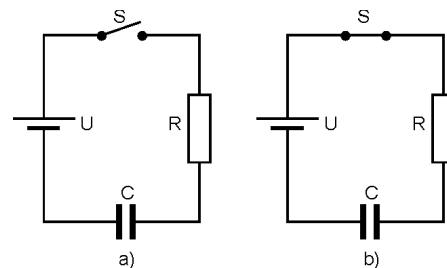
Das kann man auch in der Form

$$U - i \cdot R - \frac{Q}{C} = 0$$

schreiben. Als nächstes machen wir von der Definition  $i = \frac{dQ}{dt}$  gebrauch. Eingesetzt in die letzte Gleichung bekommt man

$$\frac{dQ}{dt} \cdot R + \frac{Q}{C} = U \quad (13.7)$$

Diese Differentialgleichung erster Ordnung lösen wir wieder durch Trennung der Variablen. Als erstes multiplizieren wir Gleichung (13.7) mit  $C$



**Abbildung 7** Schaltung zum Laden eines Kondensators. a) Der Kondensator ist zu Beginn entladen und der Schalter S geöffnet. b) Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird der Schalter geschlossen und der Kondensator beginnt sich aufzuladen.

$$\frac{dQ}{dt} \cdot RC + Q = UC$$

und trennen anschliessend die Variablen:

$$\frac{dQ}{CU - Q} = \frac{dt}{RC}.$$

Zunächst integrieren wir beide Seiten zu

$$-\ln(CU - Q) = \frac{t}{RC} + A.$$

Dabei ist A eine beliebige Integrationskonstante. Jetzt wenden wir auf beiden Seiten die Exponentialfunktion an und erhalten

$$CU - Q = e^{-A} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = B \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Dabei ist  $B = e^{-A}$  nur eine Konstante, deren Wert aus den Anfangsbedingungen folgt: Zum Zeitpunkt  $t=0$  gilt auch  $Q=0$  und somit

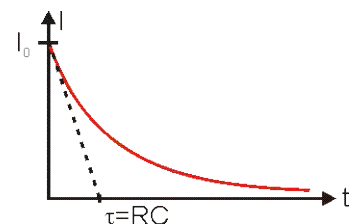
$$B = CU.$$

Damit ist aber der Ausdruck für die Ladung auf dem Kondensator als Funktion der Zeit gefunden:

$$Q = CU \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q_e \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right). \quad (13.8)$$

Da für den Strom ja eben  $i = \frac{dQ}{dt}$  gilt, folgt durch eine Ableitung der letzten Gleichung nach der Zeit

$$i = \frac{dQ}{dt} = -CU \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \left(-\frac{1}{RC}\right) = \underline{\underline{i_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}}. \quad (13.9)$$



**Abbildung 8** Stromverlauf am Kondensator beim Ladevorgang.



## 13.3 LR – Kreise – Induktivitäten im Gleichstromkreis

LR – Kreise sind Stromkreise, in denen nebst einer Spannungsquelle und einem Widerstand auch eine Spule vorkommt.

### 13.3.1 Induktivität

In Kapitel 12 haben wir das Induktionsgesetz von Faraday kennen gelernt. Es lautet in seiner einfachsten Form

$$U_{ind} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (13.10)$$

und sagt aus, dass jede Änderung eines magnetischen Flusses in einer Leiterschleife eine Induktionsspannung hervorruft, welche ihrer Ursache entgegen gerichtet ist. Um-schliesst die Leiterschleife den magnetischen Fluss N-fach – z.B. bei einer Spule, so tritt auch die Flussänderung N – fach auf. Berücksichtigt man das im Induktionsgesetz, so folgt

$$U_{ind} = - N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (13.11)$$

Wir erweitern das mit  $\frac{di}{di}$ <sup>1</sup> und als Ergebnis bekommen wir

$$U_{ind} = - N \frac{d\Phi}{dt} \frac{di}{di} = - N \frac{d\Phi}{di} \frac{di}{dt} = - L \frac{di}{dt}. \quad (13.12)$$

Die Grösse L ist die sogenannte Induktivität des entsprechenden Bauteils und ist ein Mass dafür, wie sich der magnetische Fluss bei einer Stromänderung verändert. Die Einheit der Induktivität ist das H für Henry, benannt nach dem amerikanischen Physiker Joseph Henry (Abbildung 9). Auch wenn man es vermuten könnte, kann man die Induktivität nur für einfache Leiteranordnungen analytisch berechnen. Für das Beispiel einer langen Spule (Solenoid) soll das an dieser Stelle gemacht werden.



**Abbildung 9** Joseph Henry (1797-1878).  
Quelle: Wikipedia

#### 13.3.1.1 Die Induktivität einer langen Spule

Für die Induktivität gilt nach 13.3 allgemein

$$L = N \frac{d\Phi}{di}. \quad (13.13)$$

Für den magnetischen Fluss im Innern einer langen Spule der Länge l und der Querschnittsfläche A gilt

<sup>1</sup> Für zeitlich veränderliche Ströme wird der kleine Buchstabe i verwendet!

$$\Phi_{Spule} = B_{Spule} \cdot A = \mu\mu_0 \frac{N \cdot i}{l} \cdot A. \quad (13.14)$$

Wir kombinieren die beiden letzten Formeln und erhalten für die Induktivität einer Spule

$$L = N \cdot \frac{d\left(\mu\mu_0 \frac{N \cdot i}{l} \cdot A\right)}{di} = \underline{\underline{N^2 \cdot \mu\mu_0 \frac{A}{l}}}. \quad (13.15)$$

Die quadratische Abhängigkeit von der Windungszahl erstaunt dabei nicht wirklich. Wenn man  $N$  verdoppelt, so verdoppelt man nicht nur die Anzahl Windungen, sondern auch den magnetischen Fluss durch jede dieser Windungen und damit gleich die Induktivität um den Faktor vier!

Wenn von Induktivitäten gesprochen wird, meint man nicht zwingend Spulen. Auch andere Elemente im Stromkreis können Induktivitäten aufweisen. Wir gehen aber in der folgenden Diskussion davon aus, dass diese vernachlässigbar klein gegenüber der Spuleninduktivitäten sind.

### 13.3.2 Einschaltvorgänge mit Induktivitäten

In Abbildung 10 ist das typische Schaltbild eines LR – Kreises dargestellt. Zu Beginn soll der Schalter  $S$  geöffnet sein und kein Strom fließen. Wird der Stromkreis geschlossen, so beginnt ein Strom zu fließen. Am Anfang wird die Stromstärke noch null sein, um dann mit der Geschwindigkeit  $\frac{di}{dt}$  anzuwachsen. In der Spule wird daher eine Induktionsspannung  $U_{ind} = -L \frac{di}{dt}$  erzeugt. Die Anwendung der Maschenregel liefert

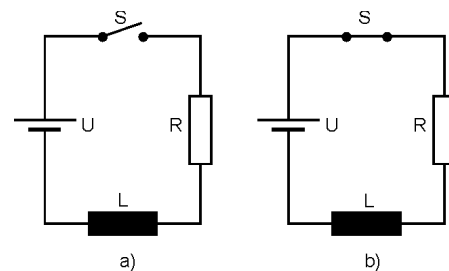


Abbildung 10 LR - Kreis

Die Anwendung der Maschenregel liefert

$$U - U_R + U_L = 0 \quad (13.16)$$

Einsetzen bekannter Identitäten ergibt

$$U - i \cdot R - L \frac{di}{dt} = 0. \quad (13.17)$$

Bei genauer Betrachtung stellt man fest, dass die Differentialgleichung erster Ordnung (13.17) die gleiche Form hat wie (13.7). Anstelle von  $\frac{dQ}{dt}$  steht in (13.17)

$\frac{di}{dt}$ ; weitere Entsprechungen sind  $R \hat{=} -L$  und

$\frac{1}{C} \hat{=} -R$ . Wenn die beiden Gleichungen aber soweit identisch sind, dann sind auch die Lösungen

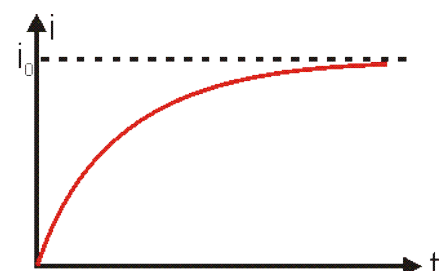


Abbildung 11 Stromverlauf an einer Induktivität beim Einschaltvorgang.

identisch. Unter Berücksichtigung obiger Entsprechungen folgt aus (13.8) schliesslich

$$i = i_e \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{L}R}\right) = i_e \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \quad (13.18)$$

Die grafische Darstellung von (13.18) in Abbildung 11 zeigt deutlich, wie der Strom beim Einschaltvorgang sich langsam seinem Endwert von  $i_e = \frac{U_0}{R}$  nähert.

### 13.3.3 Ausschaltvorgänge mit Induktivitäten

Wird in einem Stromkreis mit Induktivitäten der Strom abgestellt – die Batterie also aus dem Stromkreis entfernt – so kann der Strom wegen der Induktivität nicht plötzlich auf null abfallen sondern wird langsam abklingen. Wir setzen also  $U = 0$  in Gleichung (13.17) und erhalten

$$L \frac{di}{dt} + i \cdot R = 0. \quad (13.19)$$

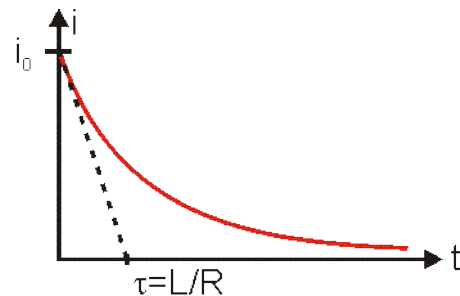
Diese Differentialgleichung ist identisch mit (13.3), wenn man die Entsprechungen

$\frac{di}{dt} \triangleq \frac{dQ}{dt}$ ,  $L \triangleq R$  und  $R \triangleq \frac{1}{C}$  berücksichtigt. Als

Lösung erhält man dann analog zu (13.4)

$$i = i_0 \cdot e^{-\frac{t}{L}R} = i_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (13.20)$$

mit  $i_0 = \frac{U_0}{R}$ . Die Abbildung 12 zeigt die grafische Darstellung von (13.20).



**Abbildung 12** Stromverlauf an einer Spule beim Ausschaltvorgang.

## 13.4 Wechselstromgenerator und Wechselstrommotor

### 13.4.1 Der Wechselstromgenerator

Wird eine Drahtschleife mit der Fläche  $A$  im Feld eines Permanentmagneten gedreht, wie es in Abbildung 13, so ändert sich der magnetische Fluss durch die Schleife ständig. Dadurch wird gemäss dem Faraday'schen Induktionsgesetz eine Spannung in der Leiterschleife induziert. Bezeichnen wir die Stellung der Schleife zum Magnetfeld als Winkel  $\alpha$ . Der zum magnetischen Feld senkrecht stehende Teil der Fläche lässt sich dann als  $A(t) = A \cdot \cos \alpha$  ausdrücken. Der die Schleife durchdringende magnetische Fluss ist damit gegeben durch

$$\Phi = B \cdot A \cdot \cos \alpha .$$

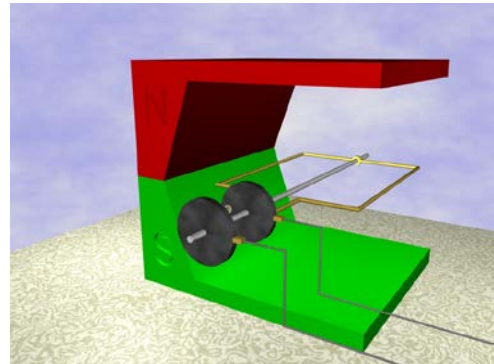
Falls die Schleife mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotiert, so ist der aktuelle Drehwinkel  $\alpha = \omega \cdot t$ . Die induzierte Spannung kann damit geschrieben werden als

$$U_{ind} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d(BA \cos \alpha)}{dt} = B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$$

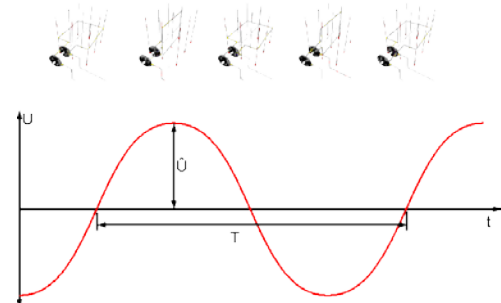
Das Maximum dieser Spannung  $\hat{U}$ , sprich "U Scheitel" oder einfach Scheitelspannung, tritt auf, wenn der Fluss durch die Schleife verschwindet, weil die Flussänderung zu diesem Zeitpunkt ihr Maximum erreicht. Die auf diese Art und Weise erzeugte Spannung ändert also periodisch ihr Vorzeichen (Abbildung 14).

### 13.4.2 Der Wechselstrommotor (Synchronmotor)

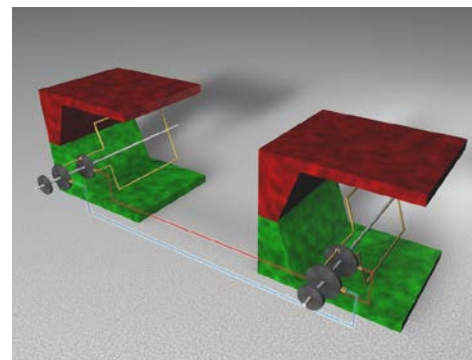
Wird der vom Generator erzeugte Strom einer zweiten, gleichartig aufgebauten Maschine zugeführt, so beginnt sich die Leiterschleife dieser Maschine ebenfalls zu drehen, wie dies in Abbildung 15 dargestellt ist. Die am Generator verrichtete Arbeit (Rotation der Leiterschleife im Magnetfeld) kann vom Motor in Form von elektrischer Energie wieder entnommen werden. Dadurch kann der Motor nun seinerseits Arbeit verrichten. Die elektrische Energie kann man dabei über weite Strecken transportieren.



**Abbildung 13** Prinzip der Funktionsweise eines Wechselstromgenerators. Eine Leiterschleife dreht sich in einem Magnetfeld. Dadurch ändert sich der magnetische Fluss durch die Leiterschleife und es wird eine Spannung induziert.



**Abbildung 14** Erzeugte Wechselspannung als Funktion der Stellung der Leiterschleife.



**Abbildung 15** Prinzip eines Wechselstrommotors.

## 13.5 Mathematische Darstellung des Wechselstromes

### 13.5.1 Reelle Darstellung von sinusförmigen Wechselstromgrössen

Die sich zeitlich verändernde Spannung  $U(t)$  hat natürlich auch einen zeitlich veränderlichen Strom  $I(t)$  zur Folge. Grundsätzlich kann die Spannung, und damit auch der Strom, eine beliebige Funktion der Zeit sein. Wir werden in diesem Kapitel aber fast ausschliesslich mit sinusförmigen Wechselströmen arbeiten, was die Rechnerei wesentlich vereinfacht. Für einen zeitabhängigen Wechselstrom  $i(t)$  und eine zeitabhängige Wechselspannung  $u(t)$  schreiben wir allgemein

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \quad \text{respektive} \quad i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i).$$

Mit  $\hat{u}$  und  $\hat{i}$  bezeichnet man die Amplituden, also die Maximalwerte der Wechselspannung respektive des Wechselstroms. Die Grössen  $\varphi_u$  und  $\varphi_i$  sind die jeweiligen Nullphasenwinkel. Die Differenz  $\varphi_u - \varphi_i$  wird Phasenverschiebung genannt. Wir verwenden für die Zeitabhängigen Grössen kleine Buchstaben, damit man sie nicht mit ihren zeitunabhängigen Äquivalenten verwechselt. Natürlich hätte man als Winkelfunktion auch den Kosinus nehmen können.

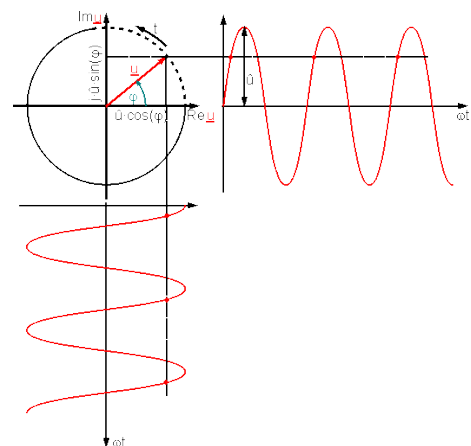
### 13.5.2 Komplexe Darstellung von sinusförmigen Wechselstromgrössen

#### 13.5.2.1 Komplexer Strom und komplexe Spannung

Die im Zusammenhang mit Wechselstromkreisen auftretenden Phänomene und Differentialgleichungen lassen sich besser verstehen und lösen, wenn man zur Darstellung der sinusförmigen Wechselstromgrössen auf die komplexe Schreibweise zurückgreift.

Dabei rotiert ein Zeiger (Drehzeiger) mit der Länge der Amplitude mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um den Nullpunkt. Der jeweilige Winkel ergibt sich aus  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ . Der Verlauf der zeitabhängigen Grösse ergibt sich dann wahlweise aus der Projektion des Zeigers auf die imaginäre Achse (Sinusfunktion) oder auf die reelle Achse (Kosinusfunktion), wie das in Abbildung 16 gezeigt ist.

Der in Abbildung 16 dargestellte Spannungszeiger lässt sich schreiben als



**Abbildung 16** Zeigerdiagramm einer Spannung in der komplexen Ebene mit den zeitabhängigen Projektionen des Zeigers auf die reelle respektive imaginäre Achse.

$$\underline{u} = \hat{u} \{ \cos(\omega t + \varphi_u) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \} = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}. \quad (13.21)$$

Auf dieselbe Art und Weise kann man auch den Stromzeiger darstellen mit

$$\underline{i} = \hat{i} \{ \cos(\omega t + \varphi_i) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) \} = \hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}. \quad (13.22)$$

## 13.5.2.2 Komplexes ohmsches Gesetz

Im reellen ist für einen ohmschen Widerstand das Verhältnis von Spannung zu Strom konstant. Für das entsprechende Verhältnis erhält man unter Verwendung der komplexen Schreibweise für die Spannung und den Strom

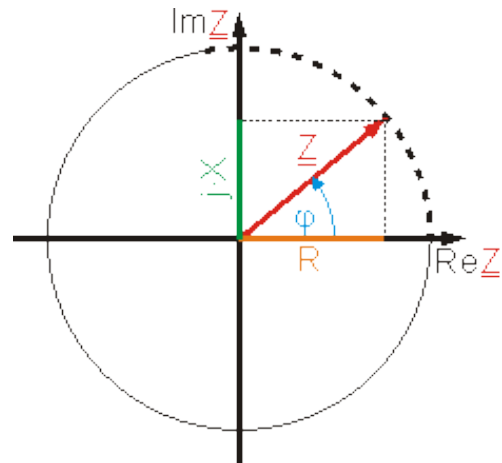
$$\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{\hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \underline{Z} \quad (13.23)$$

Man bezeichnet dies als komplexen Widerstand oder Impedanz  $\underline{Z}$ . Auch die Impedanz kann man als Zeiger in der komplexen Ebene darstellen, der allerdings nicht rotiert, wie dies in Abbildung 17 dargestellt ist. Natürlich kann man die Impedanz auch in der Form Realteil plus Imaginärteil

$$\underline{Z} = R + j \cdot X \quad (13.24)$$

schreiben.

Den Betrag der Impedanz  $|\underline{Z}|$  nennt man *Scheinwiderstand*,  $X$  nennt man *Blindwiderstand* (oder *Reaktanz*) und  $R$  wird als *Wirkwiderstand* bezeichnet.



**Abbildung 17** Impedanz als nicht rotierender Zeiger in der komplexen Ebene.

## 13.6 Effektivwerte

Die meisten Amperemeter und Voltmeter messen statt der Maximalwerte von Strom und Spannung den sogenannten Effektivwert der Spannung oder der Stromstärke. Der Effektivwert eines zeitlich veränderlichen Signals ist *definiert* zu

$$s_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt} \quad (13.25)$$

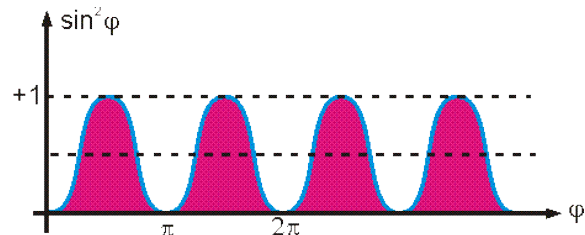
Um die Bedeutung zu erschliessen wollen wir den Effektivwert eines sinusförmigen Wechselstroms berechnen. Es gilt  $i = \hat{i} \cdot \sin(\omega t)$ . Aus (13.25) folgt somit

$$i_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (\hat{i} \sin(\omega t))^2 dt} = \sqrt{\frac{\hat{i}^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt} \quad (13.26)$$

Zur Lösung des Integrals verwenden wir die Tatsache, dass der Mittelwert von  $\sin^2(\alpha) \equiv \frac{1}{2}$  ist, das kann man aus der Abbildung 18 entnehmen, und erhalten

$$i_{eff} = \sqrt{\frac{\hat{i}^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} dt} = \sqrt{\frac{\hat{i}^2}{2}} = \underline{\underline{\frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}}} \quad (13.27)$$

Der Effektivwert des Stroms ist also um den Faktor  $\sqrt{2}$  kleiner als dessen Scheitelwert. Die technische Bedeutung kommt daher, dass ein Wechselstrom mit einem zeitlichen Mittelwert von  $i_{\text{eff}}$  in einem Widerstand die gleiche Leistung in Joulesche Wärme umsetzt, wie ein Gleichstrom der Stärke  $i_{\text{eff}}$  umsetzen würde. Die beiden Ströme sind also gleich effektiv!



**Abbildung 18** Quadrat des Sinus gegen den Winkel aufgetragen. Man erkennt, dass die Fläche innerhalb einer Periode genau  $\frac{1}{2}$  ergibt.

Durch Anwendung von (13.25) auf  $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$  erhalten wir analog auch den Effektivwert der Spannung zu

$$u_{\text{eff}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}. \quad (13.28)$$

## 13.7 Wechselstromkreise

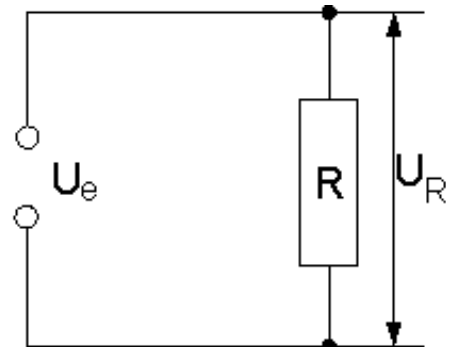
Im Rahmen der bisherigen Kapitel wurde das Verhalten verschiedener Bauteile im Gleichstromkreis diskutiert. Erwähnt wurden insbesondere der ohmsche Widerstand, der Kondensator und die Spule. Im den folgenden Abschnitten soll es darum gehen, das Verhalten dieser Bauteile in Wechselstromkreisen zu untersuchen und kennen zu lernen.

### 13.7.1 Der ohmsche Widerstand

Beginnen wir mal mit dem vermeintlich einfachsten Bauteil. Wir wollen untersuchen, welcher Strom im Stromkreis von Abbildung 19 fließt. Dazu wird ein ohmscher Widerstand  $R$  an eine externe Wechselspannungsquelle  $U_e$  angeschlossen.

Die Anwendung des 2. Kirchhoffschen Gesetzes (Maschenregel) ergibt

$$\begin{aligned} U_R - U_e &= 0 \\ R \cdot I &= U_e \end{aligned} \quad (13.29)$$



**Abbildung 19** Ohmscher Widerstand im Wechselstromkreis.

#### 13.7.1.1 Lösung mit reellen Strom- und Spannungsfunktionen

Mit den Ansätzen von Strom und Spannung von Abschnitt 13.5.1 können wir die letzte Gleichung neu schreiben:

$$\begin{aligned} R \cdot \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) &= \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \quad \text{oder} \\ \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) &= \frac{\hat{u}}{R} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i). \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn  $\varphi_u - \varphi_i = 0$  ist, wenn also Strom und Spannung in Phase sind.

## 13.7.1.2 Lösung mit komplexen Strom- und Spannungsfunktionen

Mit  $\underline{u} = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}$  und  $\underline{i} = \hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}$  lässt sich die Maschengleichung auch als  $R \cdot \underline{i} = \underline{u}$  schreiben. Man bekommt

$$\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{\hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}} = R$$

schreiben. Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen Darstellung für die Impedanz, so stellt man fest, dass offensichtlich

$$\underline{Z}_R = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = R \quad (13.30)$$

gelten muss. Dies ist aber nur der Fall, wenn  $e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = 1$  ist, respektive wenn  $\varphi_u - \varphi_i = 0$  ist.

Auch mit der komplexen Methode kommt man zum selben Schluss: bei einem ohmschen Widerstand sind Strom und Spannung in Phase. In einem Zeigerdiagramm rotieren beide mit derselben Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um den Ursprung, wie das in Abbildung 20 dargestellt ist.

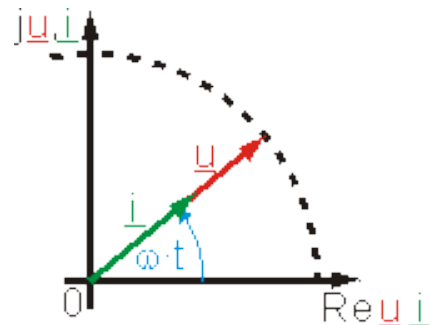


Abbildung 20 Zeiger von Strom und Spannung am ohmschen Widerstand.

## 13.7.2 Die Spule im Wechselstromkreis

Als nächstes soll das Verhalten einer Spule im Wechselstromkreis genauer untersucht werden. Wieder interessieren wir uns für den Strom, welcher im Stromkreis von Abbildung 21 fließt. Die Anwendung der Maschenregel liefert in diesem Fall

$$\begin{aligned} U_e + U_L &= 0 \text{ oder} \\ -L \frac{di}{dt} &= -U_e \\ L \frac{di}{dt} &= U_e \end{aligned} \quad (13.31)$$

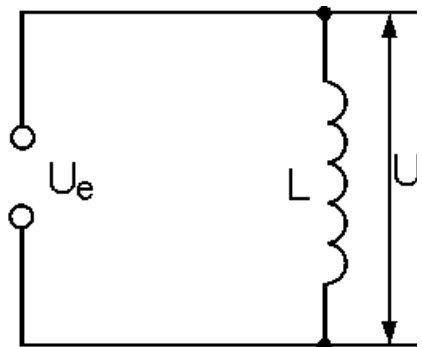


Abbildung 21 Spule im Wechselstromkreis

### 13.7.2.1 Lösung mit reellen Strom- und Spannungsfunktionen

Wir setzen in die Differentialgleichung (13.31) mal noch die Spannung in der Form  $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$  ein und erhalten

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} &= \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \text{ oder} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\hat{u}}{L} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \end{aligned} \quad (13.32)$$



Wir suchen eine Funktion, welche nach der Zeit differenziert eine Sinusfunktion ergibt – von Multiplikatoren wie  $L$  mal abgesehen. Als Ansatz zur Lösung von (13.32) wählen wir  $i = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$ . Setzen wir das mal in (13.32) ein, so erhalten wir

$$\hat{i} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{\hat{u}}{L} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (13.33)$$

beziehungsweise

$$\hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{\hat{u}}{\omega L} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u). \quad (13.34)$$

Damit man die linke und rechte Seite der Gleichung besser miteinander vergleichen kann, benutzen wir die Identität  $\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ . Eingesetzt in (13.34) folgt

$$\hat{i} \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\hat{u}}{\omega L} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (13.35)$$

Die linke und die rechte Seite Gleichung (13.35) sind nur dann identisch, wenn

$$\varphi_i + \frac{\pi}{2} = \varphi_u \quad \text{oder}$$

$$\varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2} \quad (13.36)$$

und

$$\hat{i} = \frac{\hat{u}}{\omega L} \quad (13.37)$$

gilt. Nach (13.36) eilt die Spannung an der Spule dem Strom um eine Viertelperiode voraus – Strom und Spannung sind nicht in Phase!

Stellen wir (13.37) ein wenig so kommt eine weitere Besonderheit zum Vorschein:

$$\frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \omega L = R_L. \quad (13.38)$$

Die Spule setzt dem elektrischen Strom offensichtlich einen frequenzabhängigen Widerstand entgegen. Man nennt diesen Widerstand einen *induktiven Widerstand*.

## 13.7.2.2 Lösung mit komplexen Strom- und Spannungsfunktionen

Mit  $\underline{u} = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}$  für die Komplexe Spannung wird aus (13.31)

$$L \frac{di}{dt} = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} \quad \text{oder} \quad \frac{di}{dt} = \frac{\hat{u}}{L} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}. \quad (13.39)$$

Als Ansatz wählen wir analog zu (13.22)  $\underline{i} = \hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}$ . Setzen wir das in (13.39) ein, so bekommen wir nach der Ableitung

$$\hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} \cdot j\omega = \frac{\hat{u}}{L} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} \quad \text{oder} \quad \hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} \cdot j = \frac{\hat{u}}{\omega L} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}. \quad (13.40)$$

Nun benutzt man die Identität  $j = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{j\frac{\pi}{2}}$  und setzt das in (13.40) ein:

$$\hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = \frac{\hat{u}}{\omega L} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} \quad (13.41)$$

Daraus wird dann

$$\hat{i} \cdot e^{j\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\hat{u}}{\omega L} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} \quad (13.42)$$

Die linke und die rechte Seite der Gleichung (13.42) sind nur dann identisch, wenn

$$e^{j\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{j(\omega t + \varphi_u)} \text{ beziehungsweise}$$



$$\varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2} \quad (13.43)$$

ist und ausserdem

$$\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = j\omega L \quad (13.44)$$

gilt. Man bekommt also dieselben Resultate wie unter 13.7.2.1, mit Ausnahme von (13.44). Mit Beachtung von (13.23) und (13.24) lässt sich (13.44) nämlich auch in der Form

$$\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = j\omega L = \underline{Z}_L = j \cdot X_L \quad (13.45)$$

schreiben. Der komplexe Widerstand  $\underline{Z}_L$  besteht nur aus einem imaginären Anteil. Dieser liefert für den Blindwiderstand<sup>2</sup>  $X_L$  einer Spule



$$X_L = \omega L = 2\pi fL \quad (13.46)$$

Die Verhältnisse an einer Spule sind als Zeigerdiagramm in Abbildung 22 dargestellt. Die beiden Zeiger rotieren im Gegenuhrzeigersinn  $90^\circ$  Phasenverschoben mit  $\omega t$  um den Ursprung.

Zusammenfassend:



Bei einer Spule im Wechselstromkreis eilt die Spannung dem Strom um eine Viertelperiode voraus. Die Spule entspricht im Wechselstromkreis einem Blindwiderstand, der sich nach  $X_L = \omega L$  berechnen lässt.

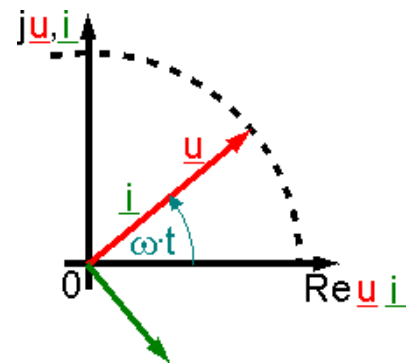


Abbildung 22 Zeiger von Strom und Spannung an einer Spule.

<sup>2</sup> Auf die Namensgebung werden wir noch zu sprechen kommen.

## 13.7.3 Der Kondensator im Wechselstromkreis

Als letztes Bauteil wollen wir noch das Verhalten eines Kondensators im Wechselstromkreis genauer unter die Lupe nehmen. Von Interesse ist wieder der Strom, der durch die Masche in fließt. Wir wenden die Maschenregel an und erhalten

$$U_c = U_e \text{ oder}$$

$$\frac{Q}{C} = U_e$$

$$\frac{dQ}{dt \cdot C} = \frac{dU_e}{dt}$$

$$\frac{i}{C} = \frac{dU_e}{dt}$$

(13.47)

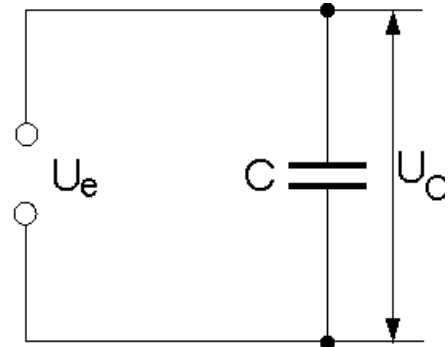


Abbildung 23 Kondensator im Wechselstromkreis.

### 13.7.3.1 Lösung mit reellen Strom- und Spannungsfunktionen

Für die Spannungsfunktion verwenden wir wieder  $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$ , damit lässt sich (13.47) auch in der Form

$$\frac{i}{C} = \hat{u} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (13.48)$$

schreiben, wobei die Ableitung bereits durchgeführt wurde. Auflösen nach der Stromfunktion gibt

$$i = \hat{u} \cdot \omega C \cdot \cos(\omega t + \varphi_u). \quad (13.49)$$

Damit wir diese Funktion wieder mit der Spannungsfunktion vergleichen können, benutzen wir die Identität  $\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$  und können nun (13.49) auch als

$$i = \hat{u} \cdot \omega C \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right) \quad (13.50)$$

schreiben. Als Ansatz für die Stromfunktion setzen wir wieder  $i = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$  ein.

Damit ergibt sich die Gleichung

$$\hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) = \hat{u} \cdot \omega C \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right). \quad (13.51)$$

Die linke und die rechte Seite der Gleichung (13.51) sind nur dann identisch, wenn

$$\varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2} \text{ oder}$$

$$\varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2} \quad (13.52)$$

und

$$\hat{i} = \hat{u} \cdot \omega C \quad (13.53)$$

gilt. Aus (13.52) kann man entnehmen, dass Strom und Spannung am Kondensator nicht in Phase sind: der Strom eilt der Kondensatorspannung um eine Viertelperiode voraus.

Umstellen von (13.53) ergibt analog zur Spule noch eine weitere Erkenntnis:

$$\frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{1}{\omega C} = R_C. \quad (13.54)$$

Der Kondensator setzt dem elektrischen Strom offensichtlich einen frequenzabhängigen Widerstand entgegen. Man nennt diesen Widerstand auch *kapazitiven Widerstand*.

### 13.7.3.2 Lösung mit komplexen Strom- und Spannungsfunktionen

Mit dem komplexen Ansatz  $\underline{u} = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}$  für die Spannung und  $\underline{i} = \hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}$  für den Strom wird aus (13.47) gleich

$$\frac{\hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}}{C} = j \cdot \hat{u} \cdot \omega \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} \quad (13.55)$$

$$\hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \hat{u} \cdot j \omega C \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

Als nächstes machen wir Gebrauch von der Identität  $j = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{j\frac{\pi}{2}}$  und können (13.55) damit in der Form

$$\hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \hat{u} \cdot \omega C \cdot e^{j\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right)} \quad (13.56)$$

schreiben. Der Vergleich von linker und rechter Seite der Gleichung ergibt

$$\varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2} \quad \text{oder}$$

$$\varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2} \quad (13.57)$$

und ((13.55))

$$\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = jX_C. \quad (13.58)$$

Der komplexe Widerstand  $Z_C$  besteht also nur aus einem imaginären Anteil. Dieser liefert für den Blindwiderstand  $X_C$  einer Spule



$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{2\pi f C}. \quad (13.59)$$

Die Verhältnisse am Kondensator sind als Zeigerdiagramm in dargestellt. Die beiden Zeiger rotieren im Gegenuhrzeigersinn  $90^\circ$  Phasenverschoben mit  $\omega t$  um den Ursprung.

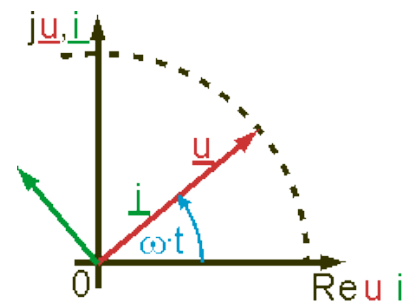


Abbildung 24 Zeiger von Strom und Spannung an einem Kondensator.

Zusammenfassend:



Bei einem Kondensator im Wechselstromkreis eilt der Strom der Spannung um eine Viertelperiode voraus. Der Kondensator entspricht im Wechselstromkreis einem Blindwiderstand, der sich nach  $|X_c| = \frac{1}{\omega C}$  berechnen lässt.

## 13.7.4 Rechnen mit mehreren Bauteilen

Die Kirchhoffschen Gesetze (s. Kapitel Elektrodynamik) gelten auch für Wechselströme, wenn man komplex rechnet. Machen wir dazu mal ein Beispiel:

**Aufgabe:** Ein Widerstand  $R=350\Omega$  und eine Spule mit der Induktivität  $L=35mH$  seien, wie in Abbildung 25 gezeigt, in Reihe geschaltet und die anliegende Spannung habe die Frequenz  $f=2000Hz$ . Wie gross sind der Wirkwiderstand, der Blindwiderstand, die Gesamtimpedanz, der Scheinwiderstand und der Phasenverschiebungswinkel von Spannung und Strom?

**Lösung**

Man hat eine Reihenschaltung aus dem *Wirkwiderstand*

$$R=350\Omega.$$

und dem *Blindwiderstand*

$$X_L=2\pi fL=439.8\Omega$$

Die Impedanz des Wirkwiderstandes ist  $\underline{Z}_R=R$  und die der Spule  $\underline{Z}_L=jX_L$ . Bei einer Reihenschaltung werden die einzelnen Impedanzen zur *Gesamtimpedanz* addiert:

$$\underline{Z}=\underline{Z}_R+\underline{Z}_L=350\Omega+j439.8\Omega.$$

Der *Scheinwiderstand*, also der Betrag der Impedanz, berechnet sich zu (Abbildung 26, Satz des Pythagoras)

$$|\underline{Z}|=\sqrt{(\operatorname{Re}\underline{Z})^2+(\operatorname{Im}\underline{Z})^2}=562.1\Omega.$$

Nun fehlt nur noch der *Phasenverschiebungswinkel*  $\varphi$ . Dieser berechnet sich zu

$$\varphi=\arctan\frac{\operatorname{Im}(\underline{Z})}{\operatorname{Re}(\underline{Z})}=\arctan\frac{439.8\Omega}{350\Omega}=51.5^\circ.$$

Abbildung 26 verdeutlicht die Zusammenhänge von Spannung und Impedanz in den entsprechenden Zeigerdiagrammen.

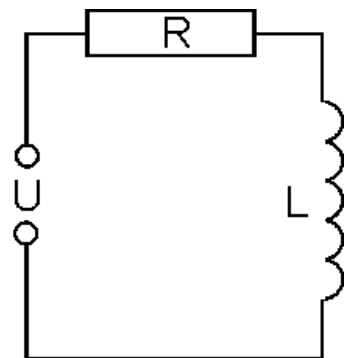


Abbildung 25

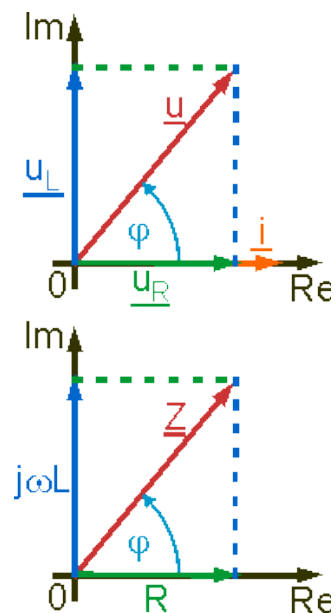


Abbildung 26

Zeigerdiagramme für die Spannungen und Impedanzen im Falle einer Reihenschaltung von ohmschem Widerstand und Spule.

Wir werden in den kommenden Abschnitten Schaltungen behandeln, in welchen die drei Bauteile Widerstand, Kondensator und Spule in Reihe oder parallel geschaltet sind. Es macht deshalb Sinn, die Impedanzen dieser zwei Anordnungen allgemein zu betrachten.

## 13.7.4.1 Impedanz von RCL in Reihe

In Abbildung 27 sind ein Widerstand, ein Kondensator und eine Spule in Reihe geschaltet. Bei einer Reihenschaltung addieren sich die einzelnen Impedanzen zur Gesamtimpedanz, wie das auch bei in Reihe geschalteten Widerständen bei Gleichströmen der Fall ist:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C + \underline{Z}_L. \quad (13.60)$$

Nun setzen wir die entsprechenden Impedanzen (13.30), (13.45) und (13.58) ein und erhalten

$$\underline{Z} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \quad (13.61)$$

Für den Scheinwiderstand folgt somit

$$R_{Sch} = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (13.62)$$

und für den Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (13.63)$$

Zur besseren Übersicht sind in die Zeigerdiagramme für die Spannungen und die Impedanzen dargestellt. Die Formeln (13.62) und (13.63) sind aus den beiden Figuren in einfach ableitbar. So sind Impedanz und Spannung nichts anderes als die vektorielle Addition der Teilimpedanzen respektive der Teilspannungen.

Auch der Zusammenhang zwischen den einzelnen Impedanzen von R, C und L und dem Phasenverschiebungswinkel  $\varphi$  ist schnell ersichtlich.

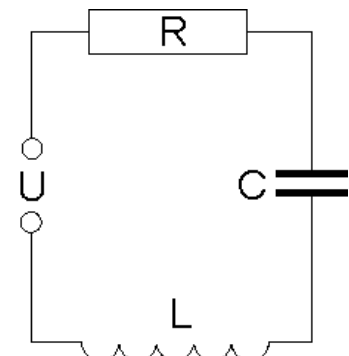
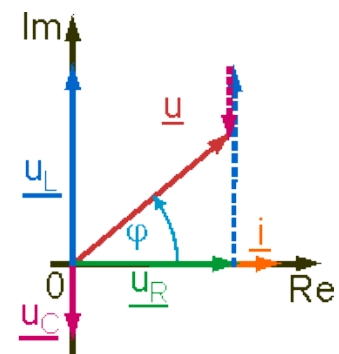
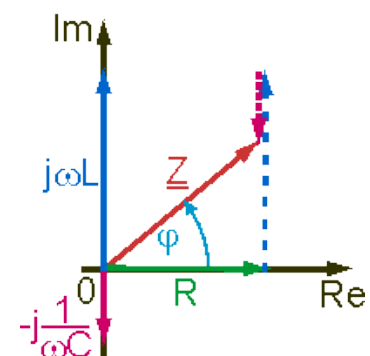


Abbildung 27 RCL in Serie



a)



b)

Abbildung 28

## 13.7.4.2 Impedanz einer Parallelschaltung von RCL

**Aufgabe:** Leiten Sie einen allgemeinen Ausdruck für den Kehrwert der Impedanz, den Kehrwert des Scheinwiderstandes und den Phasenverschiebungswinkel für den Fall einer Parallelschaltung von RCL her. Beachten Sie: Bei der Parallelschaltung werden die Kehrwerte der Teilimpedanzen zum Kehrwert der Gesamtimpedanz addiert, bzw werden die einzelnen Leitwerte zum Gesamtleitwert addiert.

## 13.7.5 Wirk- und Blindleistung

Falls in einem Stromkreis sowohl der Strom wie auch die Spannung zeitlich veränderlich sind, ist nur die Angabe des Mittelwertes für die aufgenommene Energie sinnvoll. Während einer Periode wird vom Netzwerk die Energie

$$W_j = \int_0^T U \cdot I \cdot dt \quad (13.64)$$

aufgenommen. Die Leistung ergibt sich damit zu  $P = \frac{dW_j}{dt}$  und für die mittlere Leistung folgt damit

$$\overline{P_j} = \frac{W_j}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T UI dt = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{T} \int_0^T \sin(\omega t - \varphi) \sin(\omega t) dt \quad (13.65)$$

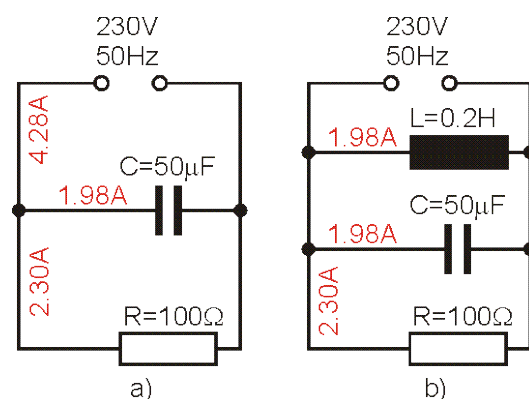
und nach der Integration (ohne Beweis)

$$\overline{P_j} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi \quad (13.66)$$

Der Faktor  $\cos \varphi$  wird Leistungsfaktor genannt. Bei praktischen Anwendungen ist man dafür besorgt, dass dieser nahe bei eins liegt. Ansonsten wird der Stromkreis von starken Blindströmen belastet, welche aber keine Leistung übertragen. Diese Blindströme werden in der Industrie mit Blindleistungszählern gemessen und den Unternehmen in Rechnung gestellt. Die Firmen sind deshalb daran interessiert den Leistungsfaktor möglichst nahe bei 1 zu halten. Dafür setzen sie Blindleistungskompensatoren ein.

*Beispiel:* In Abbildung 29 a) ist eine Parallelschaltung eines Kondensators mit einem ohmschen Widerstand gezeigt. Die angelegte Spannung betrage 230V und habe eine Frequenz von 50Hz. Wie angegeben fließen durch den Widerstand 2.30 A Wirkstrom. Durch den Blindstrom von 1.98 A muss die Gesamtleitung für einen Strom von 4.28 A ausgelegt sein.

Zur Kompensation wird, wie in Abbildung 29 b) dargestellt, parallel zum Kondensator eine Spule mit einer passenden Induktivität geschaltet – hier sind es 0.2 H – so dass der Blindstrom durch diese Spule ebenfalls 1.98 A beträgt. Da die Ströme von Spule und Kondensator um  $\pi$  phasenverschoben sind, heben sich die beiden Blindströme gerade auf. Dadurch sinkt der Gesamtstrom auf 2.3 A ab.



**Abbildung 29** Beispiel zur Blindleistungskompensation. Durch Parallelschalten einer geeigneten Induktivität wird der Blindstrom der Kapazität kompensiert.



## 13.7.6 Elektrische Schwingungen

Ein elektrischer Widerstand  $R$ , eine Induktivität  $L$  und eine Kapazität  $C$  werden in Reihe geschaltet und an die Wechselspannungsquelle  $U(t)$  angeschlossen. Für die folgenden Diskussionen werden der Wirkwiderstand, die Induktivität, die Kapazität und alle Zuleitungen als ideal angenommen.

Die Anwendung des 2. Kirchhoffschen Gesetzes auf den LCR – Kreis in Abbildung 30 ergibt

$$u + u_{ind} = u_C + u_R. \quad (13.67)$$

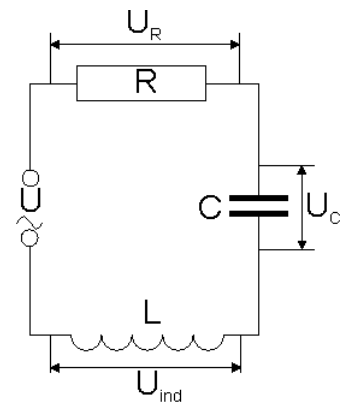


Abbildung 30 LCR - Kreis

Für die einzelnen Spannungen gilt  $u_R = R \cdot i$ ,  $u_C = \frac{q}{C}$  und  $u_{ind} = -L \frac{di}{dt}$ . Einsetzen in (13.67) gibt dann

$$\frac{q}{C} + R \cdot i + L \frac{di}{dt} = u. \quad (13.68)$$

Diese Gleichung wird nun durch eine Ableitung nach der Zeit  $t$  in eine Differentialgleichung 2. Ordnung überführt und dann noch die Relation  $i = \frac{dq}{dt}$  verwendet. Man bekommt

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{du}{dt}. \quad (13.69)$$

Kennt man im LCR – Kreis die Spannungsabhängigkeit, so ist durch (13.69) der Stromverlauf im Netzwerk eindeutig bestimmt.

### 13.7.6.1 Ungedämpfte elektrische Schwingungen

An dieser Stelle möchten wir uns ein Netzwerk betrachten, bei dem eine Induktivität vorhanden ( $L \neq 0$ ) und eine zum Zeitpunkt  $t=0$  geladene Kapazität ( $C \neq \infty$ ) vorhanden sind. Der Wirkwiderstand soll null sein ( $R=0$ ). Eine externe Spannungsquelle soll fehlen ( $U=0$ ). Die Situation stellt sich dann wie in Abbildung 31 dar. Mit den gemachten Einschränkungen folgt aus (13.69)

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0. \quad (13.70)$$

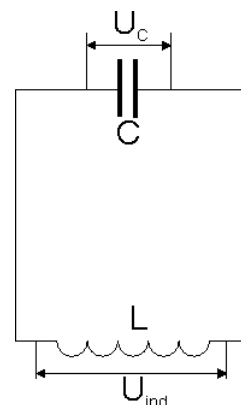


Abbildung 31 Der LC - Kreis

Wir denken daran, dass der Kondensator geladen sein soll. Zur Lösung der Differentialgleichung führen wir noch die Abkürzung  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  ein. Gleichung (13.70) vereinfacht sich dadurch auf

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot i = 0. \quad (13.71)$$

Auf den ersten Blick kann man erkennen, dass z.B. die Funktion

$$i = \hat{i} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_i) \quad (13.72)$$

(13.71) löst. Der Lösung (13.72) sind wir aber schon mal an einem anderen Ort begegnet. Das Auslenkungs – Zeit Gesetz einer harmonischen Schwingung lautet  $y = \hat{y} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ . Vergleicht man dies mit (13.72), so stellt man fest, dass der Strom – Zeit Verlauf die Form einer harmonischen Schwingung hat. Die Kreisfrequenz beträgt dabei

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (13.73)$$

Man spricht von einer ungedämpften elektrischen Schwingung. Das in Abbildung 31 abgebildete Netzwerk heisst darum Schwingkreis.

Benutzt man in (13.73) die Beziehung  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  und löst nach der Periodendauer T auf, so erhält man die *Thomsonsche Schwingungsformel*

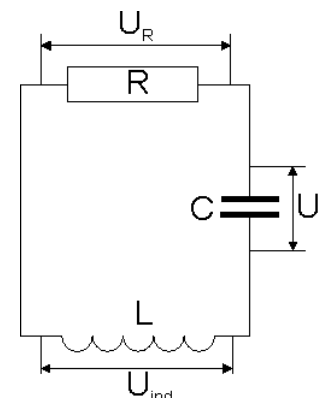
$$T = 2\pi\sqrt{LC}, \quad (13.74)$$

entdeckt 1853 vom britischen Physiker William Thomson.

### 13.7.6.2 Gedämpfte elektrische Schwingungen

In der Realität ist es aber so, dass die unter 13.7.6.1 gemachte Einschränkung  $R=0$  nicht stimmt. Es ist immer ein elektrischer Widerstand vorhanden. Wir wollen nun also (13.69) lösen, wenn  $L \neq 0$ ,  $C \neq \infty$ ,  $R \neq 0$  und  $U=0$  ist. Wieder soll also der Kondensator zum Zeitpunkt  $t=0$  geladen sein. Mit diesen Vorgaben folgt aus (13.69)

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0. \quad (13.75)$$

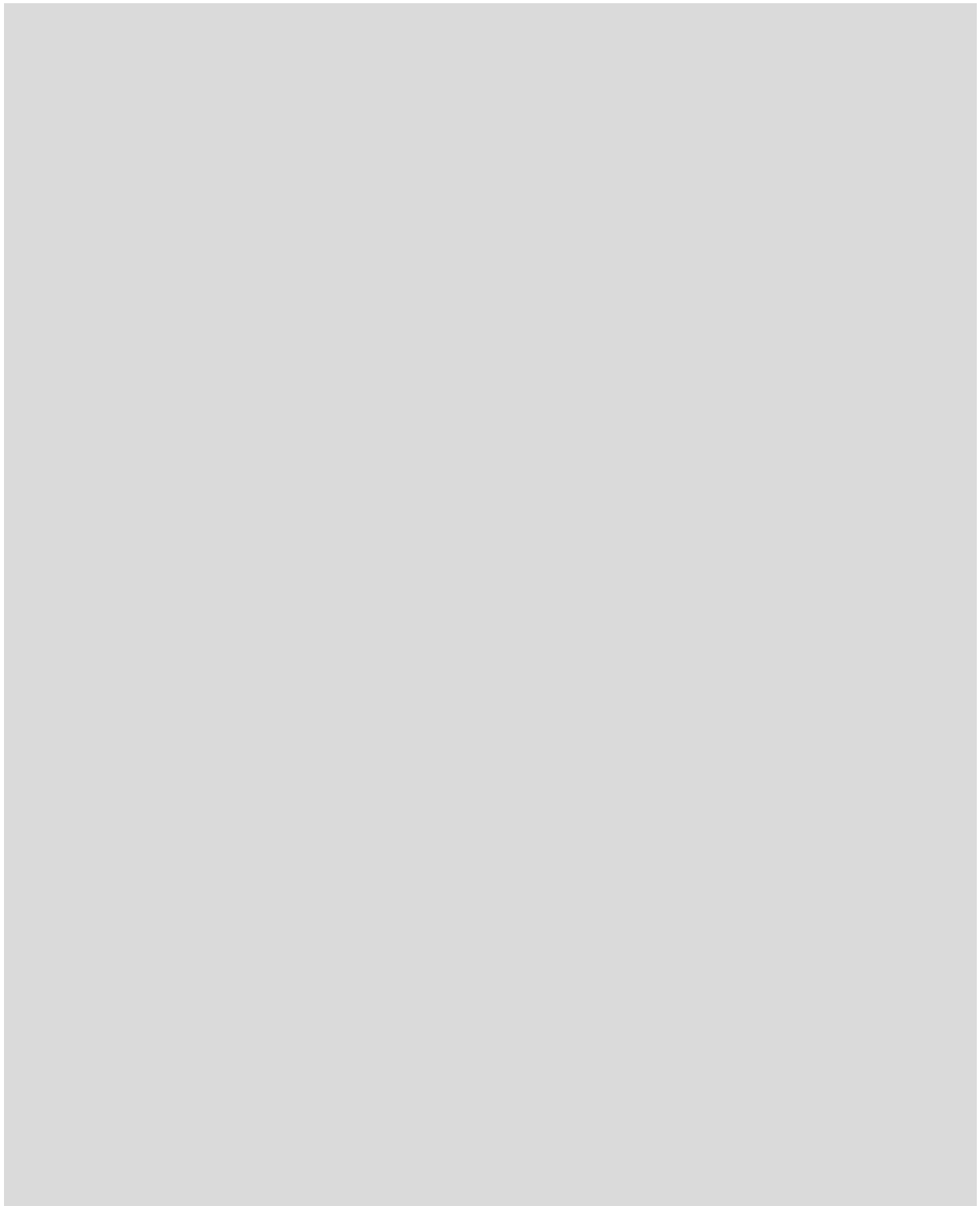


**Abbildung 32** RCL – Kreis. Zum Zeitpunkt  $t=0$  sei der Kondensator aufgeladen.

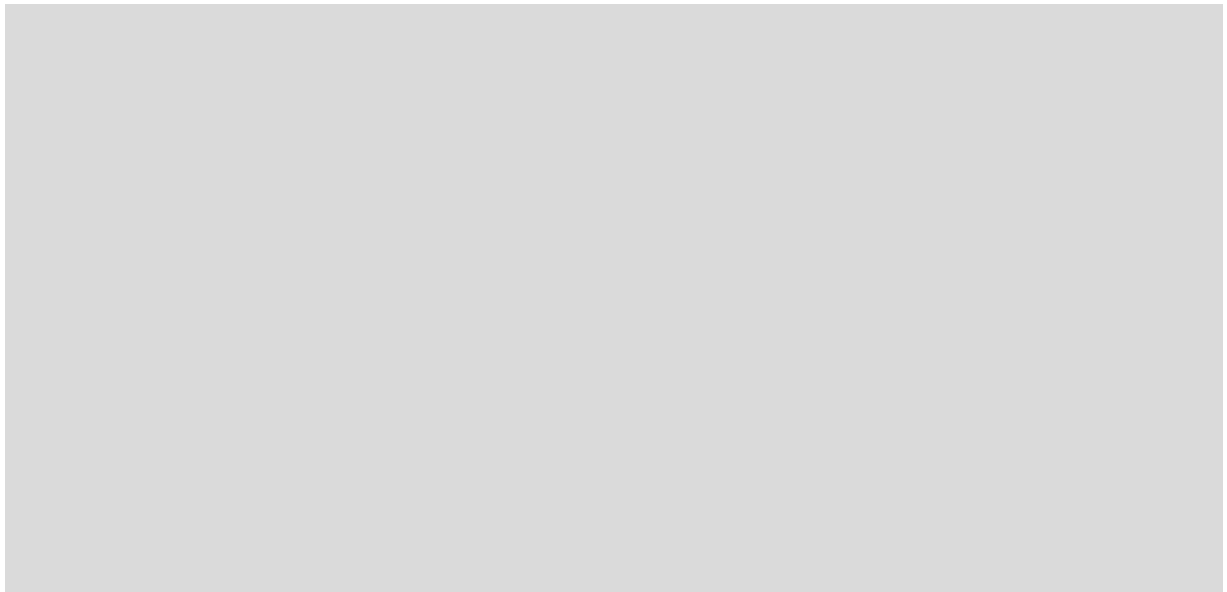
Zur Lösung von (13.75) machen wir folgenden Ansatz:



Und setzen diesen wieder in (13.75) ein.



Nun müssen wir noch eine Fallunterscheidung vornehmen:



### 13.7.6.3 Erzwungene elektrische Schwingungen

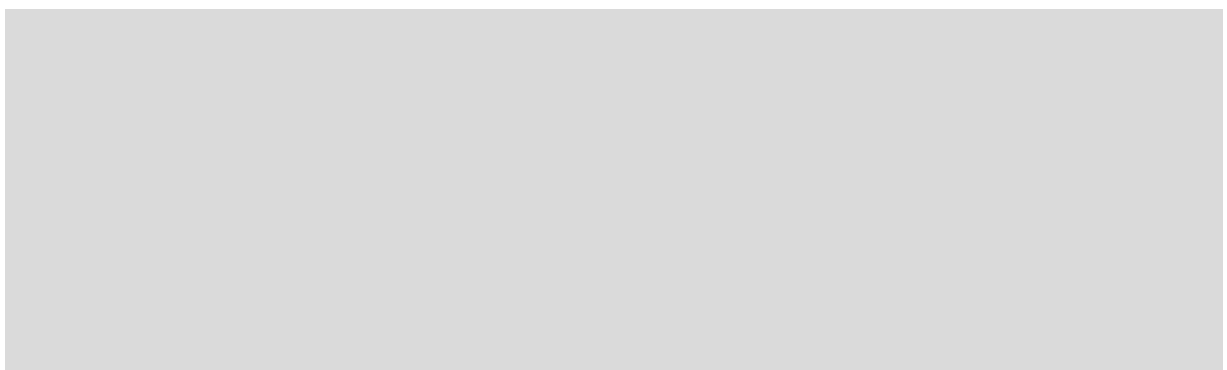
Kommen wir nun zum letzten Fall. Jetzt soll nebst einem Widerstand, einer Induktivität und einer Kapazität auch noch eine externe Spannungsquelle vorhanden sein, welche einen harmonischen Wechselstrom nach  $\underline{u} = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}$  erzeugt. Die zu lösende Differentialgleichung entspricht exakt (13.69). Einsetzen der Angaben ergibt

$$L \frac{d^2 \underline{i}}{dt^2} + R \frac{d \underline{i}}{dt} + \frac{\underline{i}}{C} = \hat{u} \cdot j \omega \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} \quad (13.76)$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichung machen wir folgenden Ansatz für den Stromverlauf:



Daraus erhält man dann





## 13.7.6.4 Anregung durch Rückkopplung

Es kann durchaus erwünscht sein, bei einem elektrischen Schwingkreis die Schwingung aufrecht zu erhalten. Dazu muss man lediglich im richtigen Moment mit Hilfe eines Gleichstroms die magnetische Energie der Spule erhöhen. Man sorgt also dafür, dass die elektrische Energie, welche während des vorangegangenen Schwingungszyklus in Joulesche Wärme umgewandelt wurde, genau in dem Moment wieder zugeführt wird, wenn das Magnetfeld der Spule wieder aufgebaut wird.

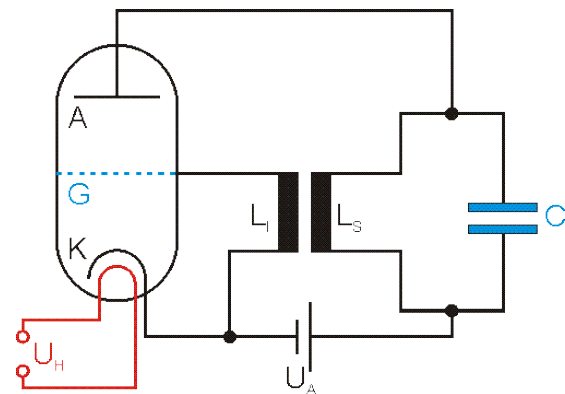
1913 stellte Meissner eine Lösung des Problems vor durch die er zum Grundsteinleger der Rundfunktechnik wurde. Dabei ist das Prinzip denkbar einfach, wie Abbildung 33 zeigt. Parallel zum Schwingkreis wird eine zweite Spule gelegt ( $L_1$ ), welche mit der Spule des Schwingkreises ( $L_S$ ) einen Transformator bildet. In der Spule  $L_1$  wird ein Strom mit der gleichen Frequenz wie im Schwingkreis induziert. Dieser Strom wird durch eine Triode verstärkt und dem Schwingkreis wieder zugeführt.

Nun ist es aber so, dass heutzutage aus offensichtlichen Gründen statt Trioden Transistoren verwendet werden. In Abbildung 34 ist deshalb eine Meissner – Schaltung abgebildet, in der die Triode durch einen Transistor ersetzt wurde. Der eigentliche Schwingkreis wird durch  $L_2$  und  $C_2$  gebildet. Die Induktivität  $L_1$  führt zum richtigen Zeitpunkt über den Transistor  $Q$  dem Schwingkreis die Energie wieder zu.

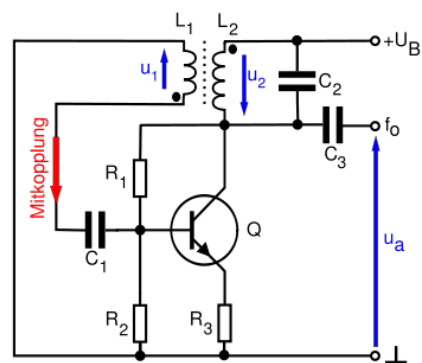
Die Resonanzfrequenz des Schwingkreises ist nach  $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  gegeben. Machen wir uns mal

Gedanken darüber, wie wir diese Resonanzfrequenz auf ein Maximum erhöhen können. Es fällt auf, dass sowohl die Induktivität  $L$  wie auch die Kapazität  $C$  minimiert werden müssen. Die kleinst mögliche Induktivität wird erhalten, wenn die Spule nur noch aus einer einzigen Windung besteht. In Abbildung 35 ist dieser Extremfall schematisch dargestellt. Es geht aber noch extremer.

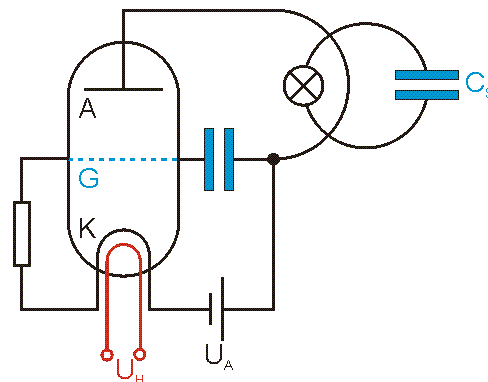
## 13.8 Der Hertz – Dipol oder der offene Schwingkreis



**Abbildung 33** Meissner- oder Armstrong Oszillator. Der Strom in der Spule des Schwingkreises regelt über den Transformator die Gitterspannung der Triode. Der Anodenstrom wird dadurch jeweils im richtigen Moment so eingeschaltet, dass der Strom in der Spule des Schwingkreises verstärkt wird.

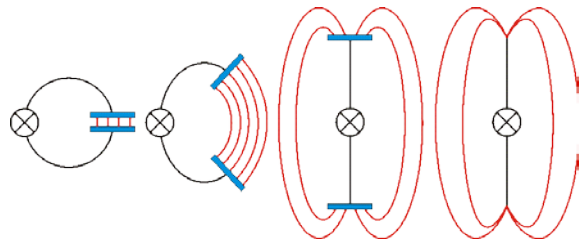


**Abbildung 34** Meissner – Schaltung. Quelle: Wikipedia



**Abbildung 35** Schwingkreis zur Erzeugung sehr hoher Frequenzen ( $10^8$  Hz). Die Spule  $L_1$  aus Abbildung 33 ist zu einer einzigen Windung verkümmert, ebenso besteht auch die Spule  $L_S$  des Resonanzkreises nur noch aus einer einzigen Windung.

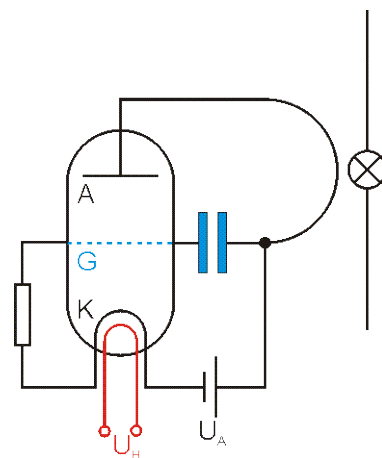
In Gedanken biegen wir nun den Kondensator CS des Resonanzkreises in Abbildung 35 auf. Die elektrischen Feldlinien beginnen dadurch weit in den Raum hinauszureichen. Durch dieses Aufbiegen wird das Magnetfeld der einzigen noch vorhandenen Windung durch das Magnetfeld eines geraden Leiters ersetzt. Als letzten Schritt lassen wir die Kondensatorplatten zu einem Punkt zusammenschrumpfen, wie dies in Abbildung 36 dargestellt ist. Wir erhalten einen offenen Schwingkreis. Auch ein gerades Leiterstück besitzt eine Induktivität und eine Kapazität, man sagt jetzt Dipol dazu.



**Abbildung 36** Vom geschlossenen zum offenen Schwingkreis.

Um die Ladungsschwingung im Dipol aufrecht zu erhalten, müssen wir ständig Energie zuführen. Wir stellen deshalb den Dipol neben einen geschlossenen Schwingkreis mit etwa derselben Eigenfrequenz (Abbildung 37). Durch Induktion entstehen im Dipol Ladungsschwingungen und eine Lampe in der Dipolmitte zeigt die entsprechenden Ströme an. An den Stabenden entstehen in ständigem Wechsel Plus- respektive Minuspole.

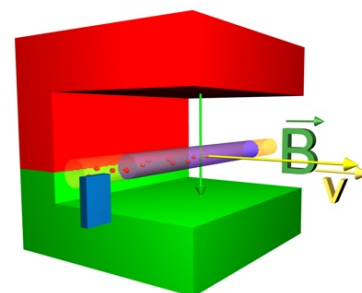
Interessanterweise muss jedoch mehr Energie zugeführt werden, als durch den elektrischen Widerstand des Dipols zu erwarten wäre – irgendwie geht Energie “verloren“! Wie ist das zu erklären?



**Abbildung 37** Anregung einer Dipolantenne zu elektrischen Schwingungen.

## 13.8.1 Der Ansatz von Maxwell

Aus Kapitel 12.10 wissen wir, dass ein sich verändernder magnetischer Fluss in einem Leiter eine Spannung erzeugt und gegebenenfalls einen Induktionsstrom induziert wird, wie z.B. die Wirbelströme zeigen. Betrachten wir dazu die Abbildung 38. Ein Leiter der Länge  $l$  bewegt sich im Magnetfeld  $B$  mit der Geschwindigkeit  $v$  nach rechts. Dadurch entsteht an seinen Enden eine Induktionsspannung vom Betrag  $U_{ind} = B \cdot v \cdot l$ . Dasselbe Ergebnis würde man erhalten, wenn sich der Magnet mit der Geschwindigkeit  $v$  nach rechts über den Leiter schieben würde; in beiden Fällen wird ein



**Abbildung 38** Ein Leiter der Länge  $l$  bewegt sich im Magnetfeld  $B$  nach rechts.

elektrisches Feld  $E = \frac{U}{l}$  induziert, welches die vorhandenen Ladungsträger verschiebt und senkrecht zum Magnetfeld steht. Zwischen elektrischem und magnetischem Feld besteht die Beziehung

$$E = \frac{U}{l} = \frac{U_{ind}}{l} = \frac{B \cdot v \cdot l}{l} = B \cdot v \quad (13.77)$$

Dies bringt uns zu einer Neuformulierung des faradayschen Induktionsgesetzes:



Verändert sich ein Magnetfeld, so wird ein elektrisches Feld induziert.

Dieses elektrische Feld ist genauso real, wie das, welches von Ladungen erzeugt wird und es übt auf Ladungen auch genauso eine Kraft aus! Der Leiter mit seinen Ladungen in obigem Beispiel diente nur als Indikator für das Vorhandensein des elektrischen Feldes. Nötig ist er nicht!

Wir können nun das Induktionsgesetz umschreiben und auf die neuen Sachverhalte erweitern.

### 13.8.1.1 Das faradaysche Induktionsgesetz – neu formuliert

Wir betrachten dazu ein elektrisches Feld  $\vec{E}$ , welches auf eine Ladung  $q_0$  die Kraft  $q_0\vec{E}$  erzeugt und auf einer geschlossenen Wegstrecke verschiebt (z.B. auf einer Kreisbahn). Auf jedem kleinen Wegstück  $d\vec{s}$  wird dabei die Arbeit  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$  verrichtet. Die insgesamt entlang des Weges verrichtete Arbeit beträgt

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint q_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 \cdot \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (13.78)$$

Nun wissen wir aber auch, dass die an der Ladung  $q_0$  verrichtete Arbeit gegeben ist durch  $W = q_0 \cdot U$ . Eingesetzt in (13.78) folgt damit

$$U = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (13.79)$$

Hinzu kommt, dass es sich bei der obigen Spannung um die Induktionsspannung handelt, für welche in Kapitel der Zusammenhang  $U = -\frac{d\Phi_m}{dt}$  gefunden wurde. Dies kombinieren wir noch mit (13.79) und erhalten mit



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (13.80)$$

eine Neuformulierung des faradayschen Induktionsgesetzes. Es sagt einfach aus, dass ein veränderlicher magnetischer Fluss ein elektrisches Feld induziert. Dabei stehen die beiden Feldvektoren  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  senkrecht aufeinander.

Überraschend an (13.80) ist hingegen, dass das elektrische Feld auch dann induziert wird, wenn es gar keine anwesenden Ladungen hat – es kommt nirgendwo in der Gleichung eine Ladung vor!



## 13.8.1.2 Das maxwellsche Induktionsgesetz

Es stellt sich nun die Frage, ob ein sich verändernder elektrischer Fluss  $\Phi_e = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$  ein Magnetfeld induzieren kann. Maxwell zeigte, dass das möglich ist. Seine Formel ist als maxwellsches Induktionsgesetz bezeichnet und sieht ganz ähnlich aus wie (13.80):



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu \cdot \varepsilon \frac{d\Phi_e}{dt} \quad (13.81)$$



**Abbildung 39** James Clerk Maxwell (1831 - 1879).  
Quelle: Wikipedia

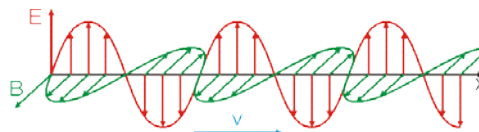
Auch hier gilt wieder, dass das Magnetfeld alleine durch einen veränderlichen elektrischen Fluss zustande kommt – es sind weder Ladungen noch Ströme notwendig!

Die beiden Gleichungen (13.80) und (13.81) lassen sich wie folgt zusammenfassen:



Wandernde elektrische und magnetische Felder erzeugen sich gegenseitig. Die Anwesenheit von Ladungen oder Strömen ist nicht notwendig! Die beiden Feldvektoren  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  stehen senkrecht aufeinander und senkrecht zur Bewegungsrichtung, wie dies in Abbildung 40 gezeigt ist.

Maxwell folgerte daraus, dass sich vom Hertzschen Dipol ausgehend elektromagnetische Felder im Raum wellenförmig ausbreiten und hatte damit eine Erklärung für die grosse Dämpfung des Hertzschen – Dipols gefunden.



**Abbildung 40** Feldvektoren und Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle.

## 13.8.1.3 Die Geschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen

Wie schnell breiten sich denn diese elektromagnetischen Wellen von Maxwell aus? Dazu ist es zunächst wichtig zu sehen, dass die Energiedichte der sich gegenseitig erzeugenden wandernden elektrischen und magnetischen Felder gleich gross sein muss.

Die Energiedichte des elektrischen Feldes beträgt  $\rho_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$  und die des magnetischen Feldes  $\rho_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu}$  (ohne Herleitung). Durch Gleichsetzen erhält man

$$\frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} \quad (13.82)$$

Kombiniert man dieses Resultat mit (13.77), stellt man fest, dass für die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle

$$\frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \mu_r \cdot \mu_0}} = v \quad (13.83)$$

gilt. Breitet sich diese im Vakuum aus, so ist  $\mu_r = 1$  und ebenso  $\varepsilon_r = 1$  und es folgt

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8.8541878 \cdot 10^{12} \frac{As}{Vm} \cdot 4\pi \cdot 10^7 \frac{Vs}{Am}}} = 299792458 \frac{m}{s}. \quad (13.84)$$

Das entspricht aber gerade der Lichtgeschwindigkeit!

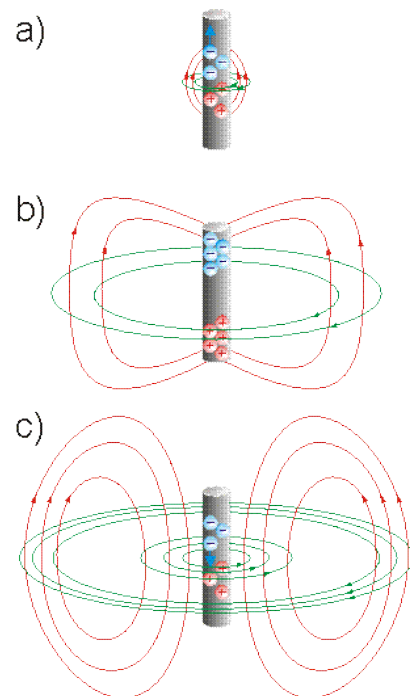
## 13.8.2 Abstrahlung elektromagnetischer Wellen beim Hertzschen Dipol

Nun stellt sich noch die Frage, wie denn diese Energieabstrahlung in Form von elektromagnetischen Wellen vonstattengeht. Den Feldverlauf beschreiben nur die Maxwell – Gleichungen exakt (davon haben wir oben zwei kennen gelernt) und die sind einigermaßen kompliziert. Allerdings lässt sich der Ablauf der Abstrahlung schematisch gut beschreiben.

In Abbildung 41a) erzeugt der Dipolstrom (induziert z.B. von einem nahen Schwingkreis) ein Magnetfeld. In Abbildung 41b) erreicht das elektrische Feld sein schliesslich sein Maximum; die elektrischen und magnetischen Feldlinien haben sich im Vergleich zu a) weiter in den Raum ausgebreitet. Zu diesem Zeitpunkt gehen die elektrischen Feldlinien aber immer noch von Ladungen aus. Nun kommt der entscheidende Schritt: Durch die Umpolung des Dipolstromes in Abbildung 41c) kehrt sich die Richtung der magnetischen Feldlinien um, die elektrischen Feldlinien werden abgeschnürt und geschlossen – die elektrischen und magnetischen Felder dieses ersten Schritts können sich nun im Raum ausbreiten und sind ab sofort nicht mehr auf die Anwesenheit von Ladungen oder Strömen angewiesen!

Der Prozess wiederholt sich nun in umgekehrter Richtung, wodurch eine permanente Abstrahlung einer elektromagnetischen Welle erfolgt.

Diese Wellen lassen sich mit einem zweiten Dipol – auch Antenne genannt – wieder einfangen. Hat die Antenne die zur Wellenlänge passende Länge, so erregt das ankommende elektrische Feld der elektromagnetischen Welle die Ladungen der Antenne in Längsrichtung zu Schwingungen. Der entstehende Strom kann nun ausgelesen werden.



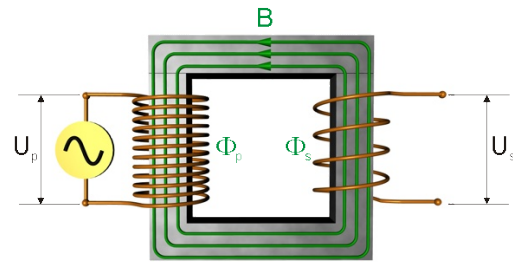
**Abbildung 41** Abstrahlung einer elektromagnetischen Welle von einem Hertzschen Dipol.

## 13.9 Der Transformator

### 13.9.1 Der unbelastete Transformator

Ein Transformator besteht aus zwei Spulen, welche über einen geschlossenen Eisenkern gewickelt sind, wie dies in Abbildung 42 gezeigt ist. An der Primärspule, mit der Windungszahl  $N_P$ , wird eine Wechselspannung angelegt  $U_P(t)$  angelegt. In der Primärspule bildet sich somit ein zeitlich veränderlicher magnetischer Fluss  $\Phi(t)$ . Der

magnetische Fluss oszilliert dabei mit der gleichen Frequenz wie die Primärspannung. In der Primärspule wird dadurch die Spannung  $U_{p,ind} = -N_p \cdot \frac{d\Phi}{dt}$  induziert. Diese kompensiert gerade die angelegte Spannung  $U_p(t)$ , so dass die Gesamtstromstärke nahezu null ist:



**Abbildung 42** Transformator ohne Verbraucher auf der Sekundärseite. Die Richtung der magnetischen Feldlinien ist stellvertretend für eine Richtung des wechselnden Magnetfeldes eingezeichnet.

$$U_p(t) + U_{p,ind} \approx 0. \quad (13.85)$$

Daraus folgt aber auch

$$U_p(t) = -U_{p,ind} = +N_p \cdot \frac{d\Phi}{dt}. \quad (13.86)$$

Der zeitabhängige magnetische Fluss durchsetzt über den Eisenkern auch die Sekundärspule mit der Windungszahl  $N_s$  und induziert in dieser eine Wechselspannung  $U_s(t)$  gleicher Frequenz:

$$U_s(t) = -N_s \cdot \frac{d\Phi}{dt}. \quad (13.87)$$

Die magnetische Flussänderung pro Zeit ist natürlich auf der Primärseite dieselbe wie auf der Sekundärseite. Löst man (13.86) und (13.87) nach  $\frac{d\Phi}{dt}$  auf und setzt gleich, bekommt man

$$+\frac{U_p(t)}{N_p} = -\frac{U_s(t)}{N_s} \quad (13.88)$$

respektive

$$\frac{U_{p,eff}}{U_{s,eff}} = -\frac{N_p}{N_s}, \quad (13.89)$$

wenn man noch die Effektivwerte der beiden Spannungen anstelle der zeitabhängigen Spannungen einsetzt.

An der Sekundärspule kann man also durch eine geeignete Wahl des Windungszahlverhältnisses jede – im Rahmen der technischen Möglichkeiten – gewünschte Spannung abgreifen. Das Minuszeichen in (13.89) gibt an, dass zwischen Primär- und Sekundärspannung eine Phasenverschiebung von  $\pi$  besteht.

Wird der Stromkreis an der Sekundärspule geschlossen, so fließt auch in der Sekundärspule ein Strom. Dieser induziert nun seinerseits in der Primärspule eine Spannung, wodurch die Primärspule nun im Mittel Leistung aufnimmt. Setzen wir voraus, dass der Transformator verlustfrei arbeitet, so muss die von der Primärspule aufgenommene mittlere Leistung  $\overline{P}_p = U_{p,eff} \cdot I_{p,eff}$  gleich der von der Sekundärspule abgegebenen Leistung  $\overline{P}_s = U_{s,eff} \cdot I_{s,eff}$  sein (Energieerhaltungssatz). Damit folgt aber auch

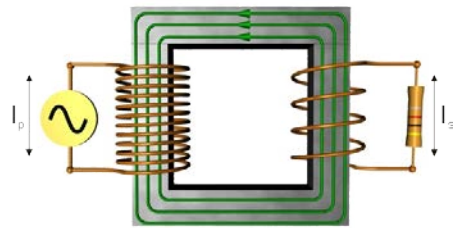


Abbildung 43 Belasteter Transformator

$$U_{p,eff} \cdot I_{p,eff} = U_{s,eff} \cdot I_{s,eff} \quad (13.90)$$

respektive in Kombination mit (13.89)

$$\frac{U_{p,eff}}{U_{s,eff}} = \frac{I_{s,eff}}{I_{p,eff}} = \frac{N_p}{N_s} \quad (13.91)$$

Die beim Belasten eines Transformators auftretenden Stromstärken in der Primär- respektive Sekundärspule verhalten sich umgekehrt wie die Windungszahlen der beiden Spulen.

## 13.9.2 Der Tesla - Transformator

Die Abbildung 44 zeigt schematische eine Anordnung, welche als Tesla – Transformator bekannt ist. Mit Hilfe eines Hochspannungstransformators wird eine angelegte Wechselspannung auf eine hohe Spannung transformiert, und mit dieser wird die Kapazität C geladen. Die Funkenstrecke F übernimmt die Funktion eines Schalters im Schwingkreis, welcher von C und der Induktivität  $L_1$  gebildet wird.

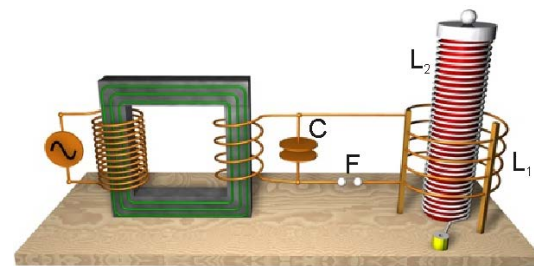


Abbildung 44 Tesla - Transformator

Bei einer gewissen Spannung an der Kapazität C springt ein Funke bei F von einer Metallkugel zur anderen und der Stromkreis wird geschlossen. Aufgrund der klein gewählten Werte für C und  $L_1$ , laufen im Schwingkreis elektrische Schwingungen mit hoher Frequenz ab. Dieser Vorgang wiederholt sich mit der Frequenz der angelegten Spannung Wechselspannung.

Gleichzeitig ist  $L_1$  aber die Primärspule eines weiteren Transformators. Dessen Sekundärspule ( $L_2$ ) besitzt eine sehr hohe Windungszahl. Insgesamt entsteht also eine sehr hohe Wechselspannung, welche mit der hohen Eigenfrequenz des Schwingkreises oszilliert.

Wird die Induktivität  $L_2$  geerdet, so gehen bei geeigneter Geometrie (kleiner Radius) des anderen Endes Koronaentladungen in die umgebende Luft aus.