Gleichstrom: RC Kreis

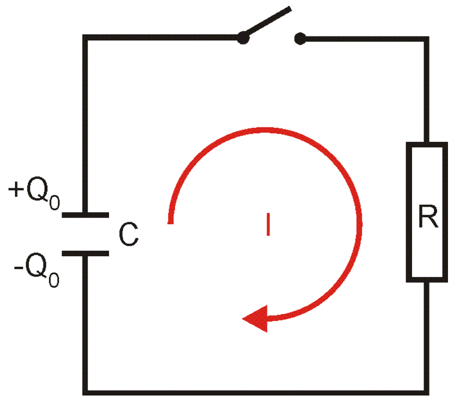
Einleitung

In diesem Praktikum werden Sie sich mit den physikalischen Eigenschaften eines Kondensators auseinandersetzen.

Theorie

Entladen eines Kondensators

Für die folgende Betrachtung sei der Kondensator bereits aufgeladen und von der Batterie getrennt worden. Das vereinfachte Schaltschema sieht darum so aus, wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt ist.



Wir gehen sorgfältig vor:

1) der Schalter ist offen. Dann ist $U_0 = \frac{Q_0}{C}$

2) der Schalter wird zum Zeitpunkt t = 0 geschlossen. Es fliesst somit kurzzeitig ein Anfangsstrom I_0, mit der Stärke $I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{Q_0}{RC}$.

3) Von jetzt an nimmt die Ladung auf dem Kondensator kontinuierlich ab.

$$I = -\frac{dQ}{dt} \qquad \text{a)}$$

4) Nun kommt die Maschenregel in Richtung des Stromes zum Zuge

$$\frac{Q}{C} - IR = 0 \qquad \text{b)}$$

5) Wir kombinieren a und b. Das Resultat lautet

$$\frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} = 0$$

$$\underline{\underline{\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} \cdot Q}}$$

Wir suchen eine Funktion für die Ladung als Funktion der Zeit, Q(t). Wir müssen also obige Gleichung nach Q auflösen.

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} \cdot Q \quad \Big| \cdot \frac{dt}{Q}$$

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} \quad \Big| \int$$

$$\int \frac{dQ}{Q} = -\int \frac{dt}{RC}$$

Dies ist nun nichts anderes als die Frage, welche Funktion nach Q abgeleitet 1/Q gibt (linke Seite) respektive nach t abgeleitet 1 gibt (rechte Seite)? Die Lösungen lauten

$$\frac{d\left(\ln|Q|\right)}{dQ} = \frac{1}{Q} \text{ und } \frac{d(t)}{dt} = 1$$

Also lässt sich die letzte Gleichung schreiben zu

$$\int \frac{dQ}{Q} = -\int \frac{dt}{RC}$$

$$\ln Q = -\frac{t}{RC} + A$$

A ist dabei eine Integrationskonstante, deren Wert durch die jeweiligen Anfangsbedingungen festgelegt wird. Nun brauchen wir nur noch den letzten Schritt zu machen, um Q(t) zu erhalten:

$$\ln Q = -\frac{t}{RC} + A \qquad \Big| e^x$$

$$Q = e^{-\frac{t}{RC} + A}$$

$$\Rightarrow Q = e^{-\frac{t}{RC}} \cdot e^A$$

$$\underline{\underline{Q = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}}$$

$e^A = Q_0$ ergibt sich aus der Anfangsbedingung, dass Q = Q_0 bei t = 0 ist. Dadurch ist $Q_0 = e^A e^0 = e^A$.

Das Produkt RC wird **Zeitkonstante** genannt und ist *charakteristisch* für einen RC Kreis. Man schreibt

$$\tau = RC .$$

Wir haben also folgendes Ergebnis für die Ladung als Funktion der Zeit erhalten:

$$\underline{\underline{Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}}$$

Für den Strom als Funktion der Zeit folgt

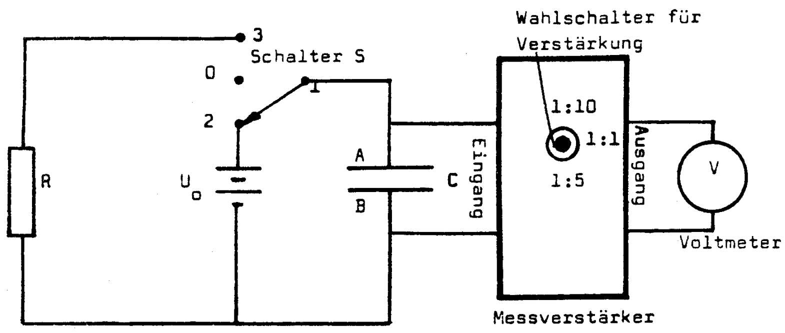
$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{d\left(Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}\right)}{dt} = \frac{Q_0}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{Q_0}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \underline{\underline{I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}}$$

Und für die Spannung als Funktion der Zeit erhält man mit $U = RI$ und $U_0 = I_0 R$

$$\underline{\underline{U = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}}$$

Anleitung zum Experiment

Das Schaltschema für diesen Versuch ist nachstehend dargestellt:



Zum Aufladen des Kondensators wird der Schalten S in die Position 2 gebracht. Die Spannung $U_0 = U_{AB}$ des aufgeladenen wird über den Messverstärker mit einem gewöhnlichem Voltmeter in Position 0 des Schalters gemessen. Durch den hohen Eingangswiderstand (>10^{12} Ω) des Verstärkers kann die Spannung zwischen A und B gemessen werden, ohne den Ladungszustand von A und B zu verändern. Somit fliesst ein vernachlässigbarer kleiner Entladungsstrom in den Eingang. Der Ausgang des Verstärkers stellt eine Spannungsquelle mit kleinem Innenwiderstand und der Urspannung U_{AB} dar. Das Voltmeter mit vorgeschaltetem Messverstärker ermöglicht also eine praktisch stromlose Spannungsmessung.
Bringt man den Schalter in Position 3, so entlädt sich der Kondensator über den Widerstand R. Die im Kondensator gespeicherte elektrische Energie wird im Widerstand in Wärme umgewandelt. Die Spannung nimmt im ersten Augenblick relativ rasch ab und nähert sich schliesslich asymptotisch gegen Null.

Aufgabe 1

Bauen Sie obige Schaltung mit einem Phywe Netzgerät als Spannungsquelle auf. Die Spannung wird mittels Voltmeter auf eine Startspannung von 9 V eingestellt. Die Kapazität soll 6.8 μF betragen und der Widerstand einen Wert von 10 MΩ aufweisen.
Bestimmen Sie etwa 10 U(t)/t Wertepaare und stellen Sie diese in einem Diagramm dar. Nach welcher Zeit gilt U(t) = ½; nach welcher Zeit gilt $U(t) = U_0/e$?
Bestimmen Sie mit Hilfe der graphischen Darstellung die Zeitkonstante τ von Hand. Ermitteln Sie die Zeitkonstante τ durch anfitten (Trendlinie einfügen z.B. in Excel) einer passenden Kurve an ihre Daten. Vergleichen Sie die beiden Werte. Vergleichen Sie anschliessend ihre Resultate mit den Angaben auf dem Kondensator und dem Widerstand. Wie gross ist der Fehler in der von Ihnen bestimmten Zeitkonstanten?

Aufgabe 2

Bauen Sie die Schaltung so um, dass Sie in der Lage sind, den Ladevorgang zu verfolgen. Bestimmen Sie etwa 10 U(t)/t Wertepaare und stellen Sie sie in einem Diagramm dar.

Hinweise zur Fehlerrechnung

Hat man n Wertepaare, welche einen linearen Zusammenhang y = ax + b darstellen sollen, so kann man die beste Gerade durch die Punktepaare auf folgende Art bestimmen (vgl. Mathematikunterricht):

Die Steigung a

$$a = \frac{n\sum x_i \cdot y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

Die Varianz der Steigung

$$\sigma_a^2 = \frac{n\sum \left(y_i - b - ax_i\right)^2}{(n-2)\cdot\left(n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right)}$$

Der Achsenabschnitt b

$$b = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

Die Varianz des Achsenabschnitts

$$\sigma_b^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum \left(y_i - b - ax_i\right)^2}{(n-2)\cdot\left(n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right)}$$